Кривизны

1 Непрерывные поверхности и кривизны

Определение 1. *Гладкая регулярная n-мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$ — гладкое отображение $r\colon U \to \mathbb{R}^N$, где U — некоторая открытая область в $\mathbb{R}^n$ с координатами $(u_1, \dots, u_n)$, причем во всех точках векторы $e_1 = \frac{\partial r}{\partial u_1}, \dots, e_n = \frac{\partial r}{\partial u_n}$ образуют канонический базис.*

Обозначения: $M = r(U) = r(u_1, \dots, u_n) = (r_1(u_1, \dots, u_n), \dots, r_N(u_1, \dots, u_n)) \subset \mathbb{R}^N$.
Система $\{e_1, \dots, e_n\}$ линейно независима $\Leftrightarrow$ **ранг матрицы Якоби**

$$J(r(u)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial r_N}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_1}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial r_N}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

максимален (то есть равен n).

Определение 2. *Пусть G — матрица Грама канонического базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$, то есть $g_{ij} = (e_i, e_j)$. Квадратичная форма, матрица которой в этом базисе равна G, называется первой квадратичной формой поверхности M в точке P.*

Определение 3. *Гиперповерхность — поверхность размерности N в $\mathbb{R}^{N+1}$.*

Далее рассматриваем только гиперповерхности. В этом случае в каждой точке P однозначно определяется вектор нормали $n(P)$.

Определение 4. *Вектор площади: $N_V = \int_M n dA$, где dA — элемент площади, а n — вектор нормали.*

Предложение 1. *Верно равенство $N_V = \int_{\partial M} r \wedge dr$.*

Определение 5. *Пусть $b_{ij}(P) = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j}(P), n(P)\right)$ и $B(P) = (b_{ij}(P))$. Тогда квадратичная форма, матрица которой в базисе $\{e_1, \dots, e_N\}$ равна $B(P)$, называется второй квадратичной формой поверхности в точке P.*

Теорема 1. *Существует ортонормированный базис $\{e'_1, \dots, e'_N\} \in T_P M$, в котором матрица I квадр. формы равна E, а матрица II формы — $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, причем λ_j — корни уравнения $\det(B - \lambda G) = 0$.*

Определение 6. *Главные направления — $e'_1, \dots, e'_N$*
Главные кривизны — $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.

Теорема 2. *(Об экстремальных значениях нормальных кривизн)*
Пусть

$$k_1 = \min_{v \in T_P M} \tilde{k}(v), \quad k_2 = \max_{v \in T_P M} \tilde{k}(v),$$

где $\|v\| = 1$. Тогда $k_1, k_2 \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

Определение 7. *(Кривизны)*

- *Средняя кривизна* — $H = \lambda_1 + \ldots + \lambda_N$.
- *Гауссова кривизна* — $K = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_N$.

Итак, пусть $M = r(U) = r(u_1, \ldots, u_n) = (r_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, r_N(u_1, \ldots, u_n)) \subset \mathbb{R}^N$.
Можно определить Лапласиан на поверхности:

$$\Delta r = (\Delta r_1, \ldots, \Delta r_N).$$

Теорема 3. *(Связь Лапласиана и средней кривизны)*
Имеет место равенство

$$\Delta r = H \cdot n.$$

Идея доказательства:

2 Дискретные поверхности и кривизны

Предложение 2. *(Формулы площади)*

(1) Площадь сферического треугольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равна $\sum \alpha_i - \pi$.

(2) Площадь сферического n-угольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равна $\sum \alpha_i + (2-n)\pi$.

Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная симплициальная поверхность без края. Для данной вершины v рассмотрим единичные нормали $n_1, \ldots, n_k$ к содержащим её граням.

Определение 8. *Гауссова кривизна $K(v)$ в точке v — это площадь сферического многоугольника, натянутого на концы векторов $n_1, \ldots, n_k$.*

Определение 9. *Угловой дефект — это величина $d(v) = 2\pi - \sum_{f \in F_v} \angle_f(v)$, где F_v — это множество всех граней, содержащих вершину v, а $\angle_f(v)$ — плоский угол грани f при вершине v.*

Предложение 3. *Имеет место равенство $d(v) = K(v)$ для всех вершин v.*

Теорема 4. *(Дискретная теорема Гаусса-Бонне)*

(1) Для произвольного выпуклого многогранника верно равенство $\sum_{v \in V} d(v) = 4\pi$.

(2) Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная ориентированная симплициальная поверхность без края. Докажите, что $\sum_{v \in V} d(v) = 2\pi\chi(M)$, где $\chi(M) = V - E + F = 2 - 2g$ — Эйлерова характеристика симплициальной поверхности M.

Важный вопрос – как выбирать нормаль к дискретной поверхности?
Будем выбирать так, чтобы выполнялась дискретная теорема

Теорема 5. *(Связь Лапласиана и средней кривизны)*

$$(\Delta r)(v) = H(v) \cdot N(v),$$

где $r \colon V \to \mathbb{R}^3$ — функция, дающая радиус-вектор координат вершин сетки.

Таким образом, $N(v)$ — это нормированный вектор Лапласиана, а $H(v)$ — его норма.