Лапласиан
09.04.2018

1 Лапласиан на римановых многообразиях

1.1 Градиент

Пространство векторных полей на многообразии M будем обозначать через $V(TM)$, где TM — касательное расслоение. Базис на касательном расслоении будем обозначать через $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Определение 1. *Пусть (M, g) — гладкое многообразие M с заданной на нем римановой метрикой g, то есть положительно определенной квадратичной формой $g_P(X, X)$, гладко зависящей от точки $P \in M$. Такая пара называется римановым многообразием.*

Определение 2. *Пусть (M, g) — риманово многообразие. Градиентом называется такой линейных оператор $\nabla_g \colon C^\infty(M) \to V(TM)$, что*

$$(\nabla_g \phi, X) = d\phi(X)$$

для всех $X \in V(TM)$.

Ясно, что

$$\nabla_g \phi = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} e_j$$

1.2 Дивергенция - определение и формулы

Для всякой формы $\omega \in \Lambda^n(M)$, где $n = \dim M$, и всякого векторного поля $X \in V(TM)$ можно определить форму $\iota_X \omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ следующим образом:

$$\iota_X \omega(X_1, \ldots, X_n) := \omega(X, X_1, \ldots, X_n).$$

Поскольку $d(\iota_X \omega) \in \Lambda^n(M)$, а все n-формы друг другу пропорциональны, то существует такое число $div_\omega X$, что

$$d(\iota_X \omega) = \mathrm{div}_\omega X \cdot \omega.$$

Если взять $\omega = \mathrm{Vol}_n = \sqrt{|\det g|} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, то число $\mathrm{div}_g X := \mathrm{div}_{\mathrm{Vol}_n} X$ называется дивергенцией поля X.

Пусть $X = \sum_j a_j e_j$. Тогда

$$\iota_X \mathrm{Vol}_n(e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n) = a_j (-1)^{j-1} \sqrt{|\det g|}.$$

Нетрудно вывести отсюда

$$\mathrm{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(b_j \sqrt{|\det g|} \right)$$

1.3 Лапласиан - определение, формулы и некоторые свойства

Определение 3. *Лапласиан на (M, g) — это оператор*

$$\Delta_g := \mathrm{div}_g \circ \nabla_g \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

Более общее определение, это лапласиан на $\Lambda(TM)$:

$$\Delta_g := \delta_g d + d\delta_g,$$

где $\delta_g := \star \circ d \circ \star$ — кодифференциал.

Используя координатные формулы дивергенции и градиента получаем запись Лапласиана на пространстве функций в локальных координатах:

$$\Delta_g \varphi = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{|\det g|} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right),$$

где g^{ij} — элементы обратной матрицы римановой метрики.

Упр. 1. *Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ Лапласиан вычисляется по формуле*

$$\Delta \varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}$$

Упр. 2. *Докажите, что общее определение Лапласиана на k-формах на римановом многообразии при $k = 0$ даст формулу для Лапласиана в локальных координатах.*

Свойства Лапласиана:

(1) Если $\Delta u = 0$ для ограниченный функции $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, то $u = const$

(2) $(\Delta u, u) \geq 0$

(3) $(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$

(4) Локальный экстремум гармонической функции достигается в граничных точках.

2 Дискретизации и приложения

Пусть теперь мы рассматриваем триангулированную (симплициальную) поверхность $M = \{V, E, F\} \subset \mathbb{R}^3$.Как мы знаем, обычно для практики стараются дискретизировать гладкие объекты так, чтобы сохранялись их основные свойства. Разумеется, удовлетворить абсолютно все свойства маловероятно, но вот выполнить большую часть из них можно.

Дискретизацию Лапласиана будем обозначать через L. В прикладных задачах нас в основном интересует поведение Лапласиана на самой поверхности, подобно тому, как в гладком сюжете мы смотрели на Δr, где r обозначала радиус-вектор поверхности.

Разумеется, $\Delta r = (\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3)$.

В дискретном случае каждой вершине $v_j \in V$ ставится в соответствие набор (вектор) ее координат $v = (v_{jx}, v_{jy}, v_{jz})$.

Нас будет в основном интересовать $L(v_j) = (L(v_{jx}), L(v_{jy}), L(v_{jz})) = (\delta_{jx}, \delta_{jy}, \delta_{jz}) = \delta_j$. Общий вид дискретного Лапласиана:

$$L(v_j) = \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}(v_i - v_j).$$

Здесь подразумевается, что мы произвели *нормировку* весов так, чтобы $\sum_{(i,j)\in E} w_{ij} = 1$.

2.1 Однородная или средняя дискретизация

Иногда используется дискретизация с $w_{ij} = 1/|E|$. Правда, мы ее использовать скорее всего не будем.

Упр. 3. *Каким свойствам (1)–(4) она удовлетворяет?*

2.2 Дискретизация через внешние формы

Через дискретные внешние формы ранее нами была получена дискретная (без нормировки) формула Лапласиана:

$$(\Delta f)_i = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{Area}(v_i^*)} \cdot \sum_j (\operatorname{ctg}\alpha_{ij} + \operatorname{ctg}\beta_{ij})(f(v_j) - f(v_i)),$$

где f — функция на сетке.

Упр. 4. *Каким свойствам (1)–(4) она удовлетворяет?*

2.3 Дискретизация через конечный набор собственных функций

Как известно, для решения уравнения $\Delta u = 0$ в гладком случае используют разложение по собственному базису. Фактически, это разложение в ряд Фурье. Пространство собственных функций слишком большое для компьютера, поэтому используют некоторое конечномерное подпространство, так чтобы ответ приближался с хорошей точностью и погрешность была бы минимальна.

Пусть M — ориентируемое триангулированное многообразие без края. Рассмотрите подпространство таких функций $\{\phi_i\}$, линейных на гранях триангуляции, что $\phi_i(v_j)$ равно 1 при $i = j$ и 0 иначе для любой вершины триангуляции v_j. С помощью тождества Грина преобразуйте уравнение $\Delta u = f$ к системе линейных уравнений $Ax = b$, где $A = (\langle \nabla\phi_i, \nabla\phi_j\rangle_M)$, x, b — векторы коэффициентов u, f соответственно при проекции на $\mathrm{Span}(\{\phi_i\})$.

Заметим, что $\nabla\phi_i = \frac{1}{2\mathrm{Area}(v_i,v_j,v_k)} \cdot \overrightarrow{v_j v_k}^{\perp}$ внутри ориентированного треугольника (v_i, v_j, v_k).

Имеем также $\langle \nabla\phi, \nabla\phi\rangle = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$.

Ясно, что $\langle \nabla\phi_i, \nabla\phi_j\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta_{ij}$, где θ_{ij} — угол при вершине v_k треугольника (v_i, v_j, v_k).

Из всего выше сказанного получаем

$$(\Delta u)_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_j (\operatorname{ctg}\alpha_{ij} + \operatorname{ctg}\beta_{ij})(u_j - u_i)$$

3 Приложения — сглаживание, деформация и кластеризация

3.1 Сглаживание

Сглаживание дискретной поверхности можно осуществлять простым применением Лапласиана к ее вершинам. Нетрудно проанализировать, что $L(v)$ – это точка лежащая в выпуклой оболочке вершин, инциндентных вершине v нашей сетки.

3.2 Метод якорей

Для более сложных деформаций применяется метод якорей. Якоря – это опорные точки, то есть каким-то вершинам Вы хотите задать конкретные координаты, а остальные должны измениться так, чтобы деформация оказалась ”гладкой”.

Итак, пусть $V = (v_1, \ldots, v_n)$ — матрица векторов вершин сетки в $\mathbb{R}^3$, L — матрица Лапласиана, где

$L_{ij} = -1$, если $i = j$,

$L_{ij} = w_{ij}$, если $(i, j) \in E$,

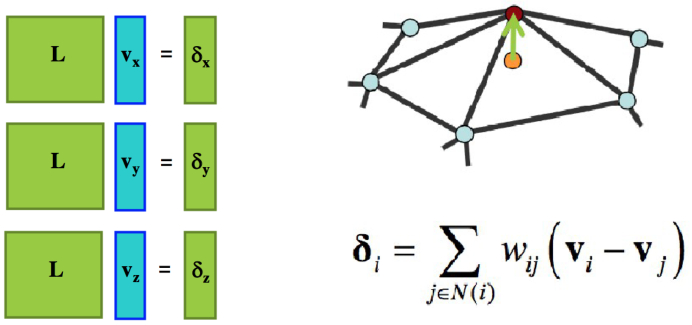
$L_{ij} = 0$, иначе.

Таким образом,

$$LV = \Delta,$$

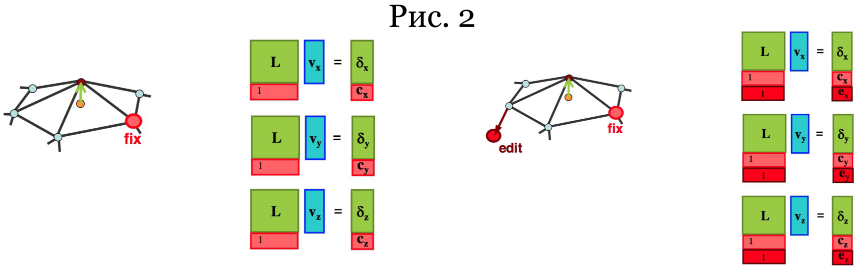
где $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — матрица значений Лапласиана на вершинах, то есть $\delta_j = L(v_j)$.

Рис. 1



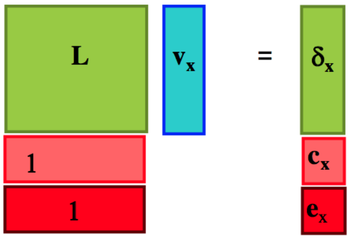
Пусть теперь вершинам $v_1, \ldots, v_m$ мы задали другое значение $v'_1, \ldots, v'_m$. Как должна поменяться остальная система вершин, чтобы вся деформация произошла ”гладко”?

Рис. 2



Для этого надо минимизировать квадратичную энергию

Рис. 2



$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \left(\left\| L\mathbf{x} - \boldsymbol{\delta}_x \right\|^2 + \sum_{s=1}^{k} \left| x_k - c_k \right|^2 \right)}$$

или, сокращая систему до оставшихся $n - m$ переменных, мы минимизируем энергию

$$E(V') = \sum_{j=m+1}^{n} \|\delta_j - L(v_j)\|$$

Так или иначе все сводится к решению системы

$$Ax = b,$$

которую мы решаем таким способом

$$x = (A^t A)^{-1} A^t b.$$