Внешние, дифференциальные и дискретные дифференциальные формы
05.03.2018

1 Многообразия и многообразия с краем

1.1 Многообразия

Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Карта на M — гомеоморфизм ϕ некоторого открытого множества $U \subset M$ на некоторую открытую область в $\mathbb{R}^n$. Карты (U, φ) и (V, ψ) называются *согласованными*, если отображение

$$\psi\phi^{-1}\colon \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

является гладким. *Атлас* — система согласованных карт, (U_α, ϕ_α) покрывающих пространство M.

Два атласа (U_α, ϕ_α) и (V_β, ψ_β) *эквивалентны*, если карты одного согласованы со всеми картами второго, то есть функции "склейки"

$$\psi_\beta\phi_\alpha^{-1}\colon \phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)$$

гладкие.

Определение 1. *Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой вместе с классом эквивалентных атласов называется* ***гладким n-мерным вещественным многообразием****.*

Пространство M без условия гладкости функций склейки называется топологическим многообразием.

1.2 Многообразия с краем

Определение 2. *Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой называется многообразием с краем, если его можно покрыть счетным семейством открытых множеств, гомеоморфных открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$.*

Последнее означает, что точки пространства M разбиваются на два класса:

(1) точки, обладающие окрестностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$;

(2) и точки, обладающие лишь окрестностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^n_+$ (так называемые *краевые точки*).

Множество всех краевых точек многообразия M называется его *краем* ∂M.

Теорема 1. *Край ∂M гладкого n-мерного многообразия M является $(n-1)$-гладким многообразием, причем если M ориентируемо, то и край ∂M ориентируем.*

Край неориентируемого многообразия может при этом оказаться ориентируемым.

2 Внешние формы

2.1 Предварительные сведения

Пусть V — n-мерное вещественное векторное пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда двойственный базис (двойственного) пространства V^* линейных функционалов на V обозначается через $\{f_1, \ldots, f_n\}$.

Внешнее умножение набора функционалов определяется с помощью определителя:

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(f_i(v_j))_{i,j}.$$

Внешнее умножение k-формы на l-форму доопределяется по линейности. Такое умножение иногда обозначают $\wedge_{k,l}$ — мы так будем делать в дискретном случае.

Внешняя k-форма на V — кососимметрическая k-линейная функция. Пространство внешних k-форм $\Lambda^k(V)$ размерности C_n^k имеет тогда базис, состоящий из внешних мономов вида $f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}$.

2.2 Звезда Ходжа, дифференцирование и Лапласиан

Определение 3. *Звезда Ходжа — это такой линейный изоморфизм*

$$\star\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V),$$

что $\star(f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}) = f_{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge f_{j_n}$, *где перестановка* $(j_1, \ldots, j_n)$ *является чётной.*

Рассмотрим теперь дифференциальную k-форму

$$\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

на многообразии M. Её внешняя производная — это дифференциальная $(k+1)$-форма

$$d\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} d\omega_{j_1 \ldots j_k}(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}.$$

Операцию дифференцирования часто обозначают так: $d_k\colon \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$.

Кодифференциал дифференциальной формы $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ определяется по правилу

$$\delta\omega := \star(d(\star\omega)).$$

Оператор Лапласа:

(1) вещественный анализ: $\Delta f = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$

(2) на пространстве 0-форм: $\Delta\omega = \star d \star d\omega$

(3) на пространстве $\Lambda^k(M)$: $\Delta\omega = (\star d \star d + d \star d \star)\omega$

2.3 Интегрирование и теорема Стокса!

Интегрирование дифференциальных форм определяется с помощью разбиения единицы. *Интеграл* от $\omega \in \Lambda^n(M)$ по карте (U, ϕ) определяется просто:

$$\int\limits_U \omega := \int \cdots \int\limits_{\phi(U)} \omega(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

где $\omega(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ — это запись формы ω в локальных координатах карты U.

Пусть теперь ω — форма с компактным носителем. Для атласа (U_α, ϕ_{alpha}) существует подчинённое ему разбиение единицы, то есть такой набор функций f_α, что

- множество значений каждой из них лежит в отрезке $[0, 1]$,
- $\text{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$,
- для всех $x \in M$ имеет место равенство $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$.

Таким образом, если носитель формы ω компактен, то $\text{supp}(\omega) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_N$, и тогда

$$\int_M \omega := \sum_{k=1}^N \int_{U_k} f_k \omega.$$

Теорема 2. *(Стокса) Пусть $\omega \in \Lambda^{n-1}(M)$ — дифф. форма с компактным носителем, где M — n-мерное ориентируемое гладкое многообразие с краем ∂M. Тогда*

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega.$$

3 Дискретные внешние формы

3.1 Сетки и внешние формы на них

Пусть теперь мы имеем дело с сеткой $\{V, E, F\}$ на поверхности M рода g. Напомним, что $V - E + F = 2 - 2g$. Вершины сетки будем обозначать буквами $u, v, t \in V$, ориентированные ребра — парой вершин $(u, v) \in E$, а ориентированные грани — тройкой вершин (u, v, t).

Двойственная сетка также имеет вершины V^*, ребра E^* и грани F^*. Вершина $f^* \in V^*$, двойственная грани $f \in F$, является ничем иным, как центром (описанной окружности) этой грани. Ребро $e^* \in E^*$ соединяет центры граней исходной сетки, смежных по ребру $e \in E$.

Как говорилось раньше 0-формы, это функции, заданные на поверхности. Дискретизация функции – это ее значения в вершинах сетки. Дискретизация 1-формы – это значения на ребрах, а именно интеграл по ребрам. Дискретизация 2–формы — интегрируем по граням.

Это делается для сохранения кососимметричности и выполнения теоремы Стокса!

Таким образом, функции (или 0-формы) на сетке M, это функции $f \colon V \to \mathbb{R}$, дискретные 1-формы — это такие функции $\omega^1 \colon E \to \mathbb{R}$, что $\omega^1(u, v) = -\omega^1(v, u)$ для всех $(u, v) \in E$. Наконец, дискретные 2-формы, это кососимметрические функции $\omega^2 \colon F \to \mathbb{R}$.

3.2 Дискретное внешнее умножение

В дискретном случае у нас имеется четыре внешних произведения: $\wedge_{0,0}$, $\wedge_{1,0}$, $\wedge_{2,0}$, $\wedge_{1,1}$.

$\wedge_{0,0} \colon \Lambda^0(M) \times \Lambda^0(M) \to \Lambda^0(M)$ — поточечное произведение, то есть $(f \wedge_{0,0} g)(v) = f(v)g(v)$.

Для всех $\omega \in \Lambda^1(M)$, $f \in \Lambda^0(M)$ и $(u, v) \in E$ мы определяем их внешнее произведение по правилу

$$(\omega \wedge_{1,0} f)(u, v) := \omega(u, v) \cdot \frac{f(u) + f(v)}{2}$$

Для всех $\omega \in \Lambda^2(M)$, $f \in \Lambda^0(M)$ и $(u, v, t) \in F$ мы определяем их внешнее произведение по правилу

$$(\omega \wedge_{2,0} f)(u, v, t) := \omega(u, v, t) \cdot \frac{f(u) + f(v) + f(t)}{3}$$

Наконец, для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(M)$ и $(u, v, t) \in F$ мы определяем их внешнее произведение по правилу

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge_{1,1} \omega_2)(u, v) := \frac{1}{6}\Big[&(\omega_1(u, v)\omega_2(v, t) - \omega_1(v, t)\omega_2(u, v)) + \\ &(\omega_1(v, t)\omega_2(t, u) - \omega_1(t, u)\omega_2(v, y)) + \\ &(\omega_1(t, u)\omega_2(u, v) - \omega_1(u, v)\omega_2(t, u))\Big] \qquad (1)\end{aligned}$$

3.3 Дискретизация звезды Ходжа

Дискретная звезда Ходжа определяется через двойственную сетку. Их всего три $\star_0$, $\star_1$, $\star_2$.

Итак, $\star_0 \colon \Lambda^0(M) \to \Lambda^{*2}(M)$, где $(\omega_0 \colon V \to \mathbb{R}) \mapsto (\star\omega_0 \colon F^* \to \mathbb{R})$, определяется для всех $v^* \in F^*$ по правилу

$$(\star_0\omega_0)(v^*) := |\mathrm{Vol}(v^*)| \cdot \omega_0(v).$$

Далее, $\star_1 \colon \Lambda^1(M) \to \Lambda^{*1}(M)$, где $(\omega_1 \colon E \to \mathbb{R}) \mapsto (\star\omega_1 \colon E^* \to \mathbb{R})$, определяется для всех $e^* \in E^*$ по правилу

$$(\star_1\omega_1)(e^*) := \frac{|\mathrm{Length}(e^*)|}{|\mathrm{Length}(e)|} \cdot \omega_1(e).$$

Наконец, $\star_2 \colon \Lambda^2(M) \to \Lambda^{*0}(M)$, где $(\omega_2 \colon F \to \mathbb{R}) \mapsto (\star\omega_2 \colon V^* \to \mathbb{R})$, определяется для всех $f^* \in V^*$ по правилу

$$(\star_2\omega_2)(f^*) := \frac{1}{|\mathrm{Vol}(f)|} \cdot \omega_2(f).$$

3.4 Дискретный дифференциал

Здесь все легко, у нас имеются всего два дифференциала на сетке, это $d_0 \colon \Lambda^0(M) \to \Lambda^1(M)$ и $d_1 \colon \Lambda^1(M) \to \Lambda^2(M)$, где для каждого $f \in \Lambda^0(M)$, $\omega \in \Lambda^1(M)$, $(u, v) \in E$ и $(u, v, t) \in F$ имеет место

$$(d_0 f)(u, v) = f(v) - f(u), \quad (d_1\omega)(u, v, t) = \omega(u, v) + \omega(v, t) + \omega(t, u).$$