

Здесь и ниже  $M$  — гладкая поверхность, заданная радиус-вектором  $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

- $n$  — вектор нормали,
- $K$  и  $H$  — гауссова и средняя кривизны,
- $N_V = \int_M n dA$  — вектор площади,
- $dA = |r_u \times r_v| \cdot du \wedge dv$  — элемент площади,

где вектора из дифференциальных форм перемножаются с помощью векторного произведения.

**ГКП6♦2.** Докажите формулу  $dr \wedge dn = Hn dA$ .

**ГКП6♦3.** Докажите формулу  $\frac{1}{2}dn \wedge dn = Kn dA$ .

**ГКП6♦4.** Докажите, что  $N_V = \int_{\partial M} r \wedge dr$ .

**ГКП6♦5.** Докажите, что  $\Delta r = Hn$ .

### Лапласиан. Метод конечных элементов.

09.04.2018

$\mathcal{L}^2(\Omega, d\mu)$  — пространство функций на измеримом пространстве  $\Omega$  с мерой  $\mu$ , наделённое скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_\Omega = \int_\Omega fg d\mu.$$

Оно является *гильбертовым пространством*.

**ГКП7♦1.** Выпишите явную формулу Лапласиана на сфере  $\mathbb{S}^2$  в сферических координатах.

**ГКП7♦2.** С помощью метода Грама–Шмидта найдите ортонормированный базис подпространства  $V = \text{Span}(1, x, x^2, x^3)$  в  $\mathcal{L}^2([0, 1], dx)$  и найдите проекцию  $\sqrt{x}$  на  $V$ .<sup>1</sup>

**ГКП7♦3.** Докажите *тождество Грина* для дифференцируемых функций  $f, g$ :

$$\langle \Delta f, g \rangle_X = -\langle \nabla f, \nabla g \rangle_X + \langle n \cdot \nabla f, g \rangle_{\partial X}.$$

Указание: используйте форму  $g \star df$ .

**ГКП7♦4.** Пусть  $M$  — ориентируемая симплициальная поверхность без края. Рассмотрите подпространство таких функций  $\{\phi_i\}$ , линейных на гранях триангуляции, что  $\phi_i(v_j) = \delta_{ij}$  для любой вершины триангуляции  $v_j$ . С помощью тождества Грина преобразуйте уравнение  $\Delta u = f$  к системе линейных уравнений  $Ax = b$ , где  $A = (\langle \nabla \phi_i, \nabla \phi_j \rangle_M)$ ,  $x, b$  — векторы коэффициентов  $u, f$  соответственно при проекции на  $\text{Span}(\{\phi_i\})$ .

**ГКП7♦5.** Рассмотрим симплициальную поверхность  $M$ , пусть координаты  $i$ -й вершины —  $r_i$ , а звезда  $i$ -й вершины —  $\text{St}(i)$ . Докажите формулы

$$1. \quad n dA = \frac{1}{6} \sum_{(ijk) \in \text{St}(i)} r_j \times r_k,$$

<sup>1</sup>Элементы полученного базиса называются *многочленами Чебышёва* на отрезке  $[0, 1]$ ; полученная проекция — частный случай разложения в *ряд Фурье* по ортонормированному базису.

$$2. \quad HndA = \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in \text{St}(i)} (\text{ctg } \alpha_{ij} + \text{ctg } \beta_{ij})(r_i - r_j),$$

$$3. \quad Kn dA = \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in \text{St}(i)} \frac{\varphi_{ij}}{\ell_{ij}}(r_j - r_i),$$

где  $\varphi_{ij}$  — двугранный угол при ребре  $(i, j) \in E$ ,  $\ell_{ij}$  — длина ребра  $(i, j)$