ГКП5⋄5. Рассмотрим объём Vol многогранника как функцию от положения вершины v. Докажите, что

$$\nabla_v \mathrm{Vol} = \frac{1}{3}\sum_i A_i N_i,$$

где A_i и N_i — соответственно площади и нормали граней, содержащих v.

ГКП5⋄6. Рассмотрим площадь S симплициальной поверхности как функцию от положения вершины v. Докажите, что

$$\nabla_v S = \frac{1}{2}\sum_i (\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_i)(v_i - v),$$

где v_i — вершины, смежные с данной, а α_i, β_i — углы, противолежащие ребру vv_i.

Кривизны-2

02.04.2018

Здесь и ниже M — гладкая поверхность, заданная радиус-вектором $r\colon U \to \mathbb{R}^3$.

- n — вектор нормали,
- K и H — гауссова и средняя кривизны,
- $N_V = \int_M n dA$ — вектор площади,
- $dA = |r_u \times r_v| \cdot du \wedge dv$ — элемент площади,

где вектора из дифференциальных форм перемножаются с помощью векторного произведения.

ГКП6⋄1. Докажите формулу $\frac{1}{2} dr \wedge dr = n\, dA$.

ГКП6⋄2. Докажите формулу $dr \wedge dn = Hn\, dA$.

ГКП6⋄3. Докажите формулу $\frac{1}{2} dn \wedge dn = Kn\, dA$.

ГКП6⋄4. Докажите, что $N_V = \int_{\partial M} r \wedge dr$.

ГКП6⋄5. Докажите, что $\Delta r = Hn$.