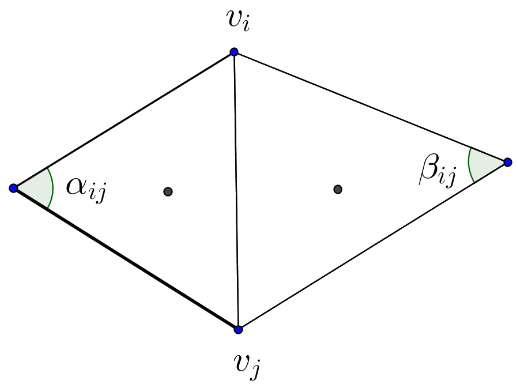
ГКП4⋄4. Обозначим углы напротив ребра (v_i, v_j) так, как показано на рисунке.



Используя общую формулу оператора Лапласа $\Delta\omega = (\star d \star d + d \star d\star)\omega$, выведите дискретную формулу Лапласиана: $(\Delta f)_i = \frac{1}{2\cdot\mathrm{Area}(v_i^*)} \cdot \sum_j (\mathrm{ctg}\,\alpha_{ij} + \mathrm{ctg}\,\beta_{ij})(f(v_i) - f(v_j))$, где f — функция на сетке.

Кривизны

19.03.2018

ГКП5⋄1. Докажите, что
1. площадь сферического треугольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равна $\sum \alpha_i - \pi$.
2. Докажите, что площадь сферического n-угольника на единичной сфере с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равна $\sum \alpha_i + (2-n)\pi$.

ГКП5⋄2. Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная симплициальная поверхность без края. Для данной вершины v рассмотрим единичные нормали $n_1, \ldots, n_k$ к содержащим её граням. Определим гауссову кривизну $K(v)$ в точке v как площадь сферического многоугольника, натянутого на концы векторов $n_1, \ldots, n_k$, а также определим угловой дефект по формуле $d(v) = 2\pi - \sum_{f\in F_v} \angle_f(v)$, где F_v — это все грани, содержащие вершину v, а $\angle_f(v)$ — плоский угол грани f при вершине v. Докажите, что $d(v) = K(v)$ для всех вершин v.

ГКП5⋄3. (Дискретная теорема Гаусса-Бонне)
1. Для произвольного выпуклого многогранника докажите, что $\sum_{v\in V} d(v) = 4\pi$.
2. Пусть $M = \{V, E, F\}$ — связная ориентированная симплициальная поверхность без края. Докажите, что $\sum_{v\in V} d(v) = 2\pi\chi(M)$, где $\chi(M) = V - E + F = 2 - 2g$ — Эйлерова характеристика симплициальной поверхности M.

ГКП5⋄4. Площадь S треугольника ABC на плоскости зависит от расположения точек A, B и C. Докажите, что градиент S как функции от A — это вектор $\nabla_A S$, перпендикулярный стороне BC, а по длине равный половине BC.

ГКП5⋄5. Рассмотрим объём Vol многогранника как функцию от положения вершины v. Докажите, что

$$\nabla_v \mathrm{Vol} = \frac{1}{3}\sum_i A_i N_i,$$

где A_i и N_i — соответственно площади и нормали граней, содержащих v.

ГКП5◇6. Рассмотрим площадь S симплициальной поверхности как функцию от положения вершины v. Докажите, что

$$\nabla_v S = \frac{1}{2}\sum_i (\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_i)(v_i - v),$$

где v_i — вершины, смежные с данной, а α_i, β_i — углы, противолежащие ребру vv_i.