ГКП3◇5. Пусть $\omega = 2dx + xdy$ — дифференциальная 1-форма на $\mathbb{R}^2$, $A = (0,0)$, $B = (1,1)$. Проинтегрируйте ω вдоль ориентированных отрезков AB и BA. Как соотносятся эти два значения?

ГКП3◇6. Пусть ω — дискретная дифференциальная 0-форма на треугольной сетке. Вычислите $d^2\omega$.

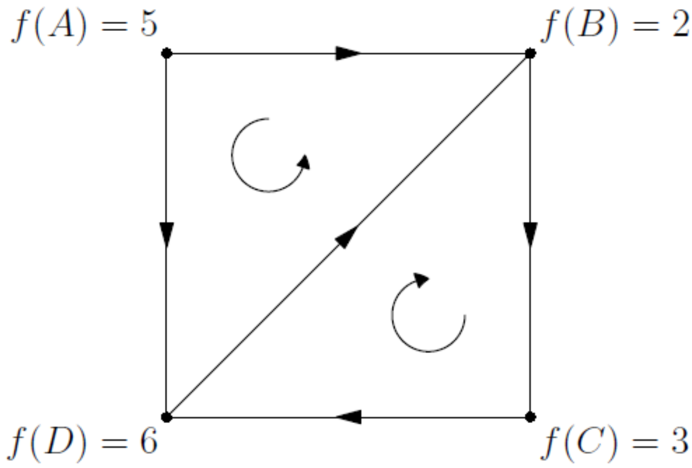
Сетки и дискретные формы

12.03.2018

ГКП4◇1. Пусть $\{V, E, F\}$ — сетка на поверхности M рода $g = 0$. Докажите, что

(1) $E + 6 \leq 3V$,
(2) $E + 6 \leq 3F$,
(3) $V + 4 \leq 2F$,
(4) сетка имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань.

ГКП4◇2. Пусть V — сетка с вершинами $A = (0,1)$, $B = (1,1)$, $C = (1,0)$, $D = (0,0)$, а $f\colon V \to \mathbb{R}$ — функция на вершинах, то есть 0-форма, как на рисунке:

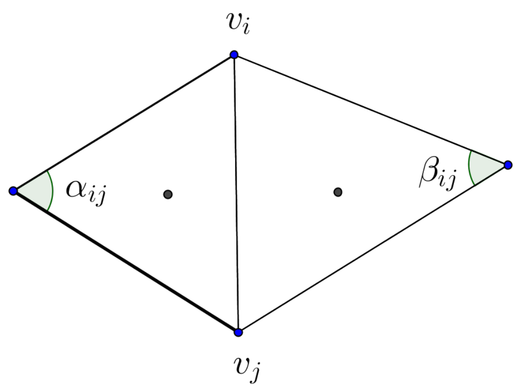


(1) Какой формой является df, каковы её области определения и значений? Здесь d — *дискретный* внешний дифференциал.
(2) Вычислите df и $d(df)$.

ГКП4◇3. Для тех же V и f, что в предыдущей задаче, рассмотрим $h\colon V \to \mathbb{R}$ со значениями $h(A) = -3$, $h(B) = 0$, $h(C) = 2$, $h(D) = 3$. Вычислите

(1) $f \wedge_{0,0} h$,
(2) $w = (df) \wedge_{1,0} h$,
(3) $(dw) \wedge_{2,0} h$,
(4) $(df) \wedge_{1,1} (dh)$.

ГКП4◇4. Обозначим углы напротив ребра (v_i, v_j) так, как показано на рисунке.



Используя общую формулу оператора Лапласа $\Delta\omega = (\star d \star d + d \star d \star)\omega$, выведите дискретную формулу Лапласиана:

$$(\Delta f)_i = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{Area}(v_i^*)} \cdot \sum_j (\mathrm{ctg}\,\alpha_{ij} + \mathrm{ctg}\,\beta_{ij})(f(v_i) - f(v_j)),$$

где f — функция на сетке.