Внешние и дифференциальные формы
05.03.2018

Звезда Ходжа — это такой линейный изоморфизм $\star\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$, что $\star(f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}) = f_{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge f_{j_n}$, где $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — двойственный базис, и перестановка $(j_1, \ldots, j_n)$ является чётной.

Внешний дифференциал k-формы $\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$ на многообразии M — это дифференциальная $(k+1)$-форма $d\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} d\omega_{j_1 \ldots j_k}(x) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$.

ГКП3◇1. Пусть $\omega_1 = f_1 + f_2 + f_3$, $\omega_2 = f_1 - f_2 + 2f_3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Вычислить $\star\omega_1$, $\star\omega_2$ и $\star(\omega_1 \wedge \omega_2)$.

ГКП3◇2. Пусть $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

(1) Для $n = 2$ покажите, что $\star(\star\omega) = -\omega$, а для $n = 3$ — что $\star(\star\omega) = \omega$.

(2) Для всех $n \geq 2$ покажите, что $\star(\star\omega) = (-1)^{n+1}\omega$.

(3) А что можно сказать про $\star(\star\omega)$, если ω — внешняя k-форма?

ГКП3◇3. Кодифференциал дифференциальной формы $\omega \in \Lambda^k(M)$ определяется по правилу

$$\delta\omega := \star(d(\star\omega)).$$

(1) Докажите, что если $k = 0$, то $\delta\omega = 0$.

(2) Докажите, что если $\omega \in \Lambda^k(M)$, то $\delta\omega \in \Lambda^{k-1}(M)$.

(3) Вычислите $\delta\omega$ для $\omega = e^y dx + (x+y)^2 dy \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$.

ГКП3◇4. Обобщённый Лапласиан на k-формах задаётся по формуле

$$\Delta := \delta d + d\delta = \star d \star d + d \star d \star .$$

(1) Пусть $f(x, y) = xy + 2y^2$. Вычислите Δf, используя формулу выше и стандартную формулу из анализа. Сравните результат.

(2) Вычислите $\Delta\omega$, для $\omega = xdx + zdy - ydz \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$.

ГКП3◇5. Пусть $\omega = 2dx + xdy$ — дифференциальная 1-форма на $\mathbb{R}^2$, $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$. Проинтегрируйте ω вдоль ориентированных отрезков AB и BA. Как соотносятся эти два значения?

ГКП3◇6. Пусть ω — дискретная дифференциальная 0-форма на треугольной сетке. Вычислите $d^2\omega$.