Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 1: Введение и геометрия кривых и поверхностей

Богачев Николай Владимирович

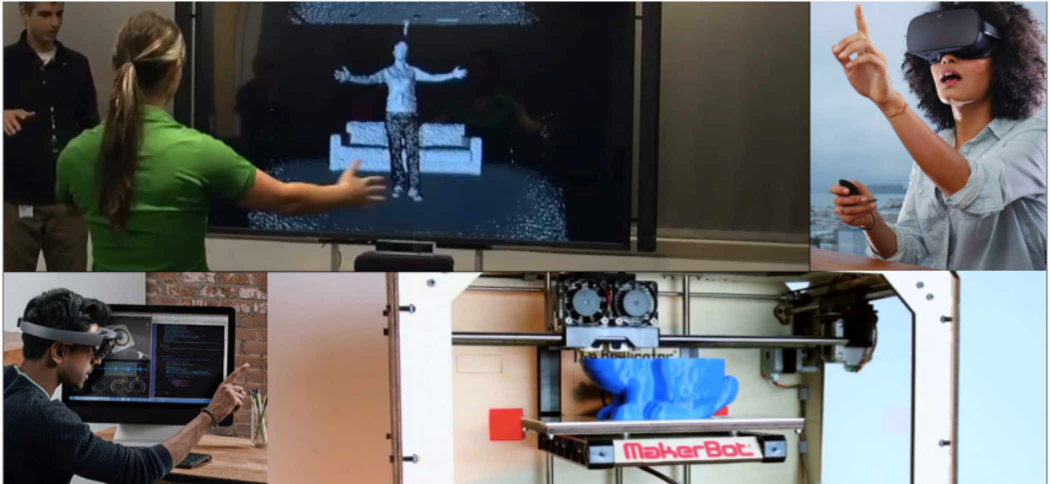
05 сентября 2018

Московский физико-технический институт,
Кафедра дискретной математики,
Лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

Введение

О чем вообще идёт речь?

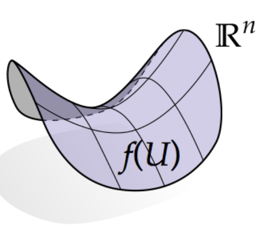
Геометрия повсюду!

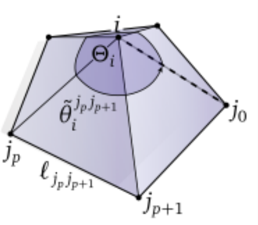


О чем вообще идёт речь?

Как можно думать о геометрических формах и объектах:

- математически (**дифференциальная геометрия**)
- как о дискретных структурах и сетках (**дискретная дифференциальная геометрия**)





Основные цели курса:

- Помогаем компьютерам!
- **Центральная идея:** Гладкое VS. Дискретное

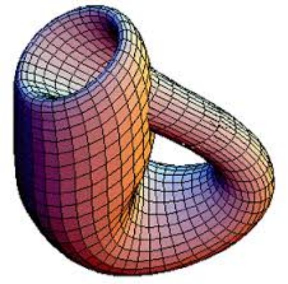
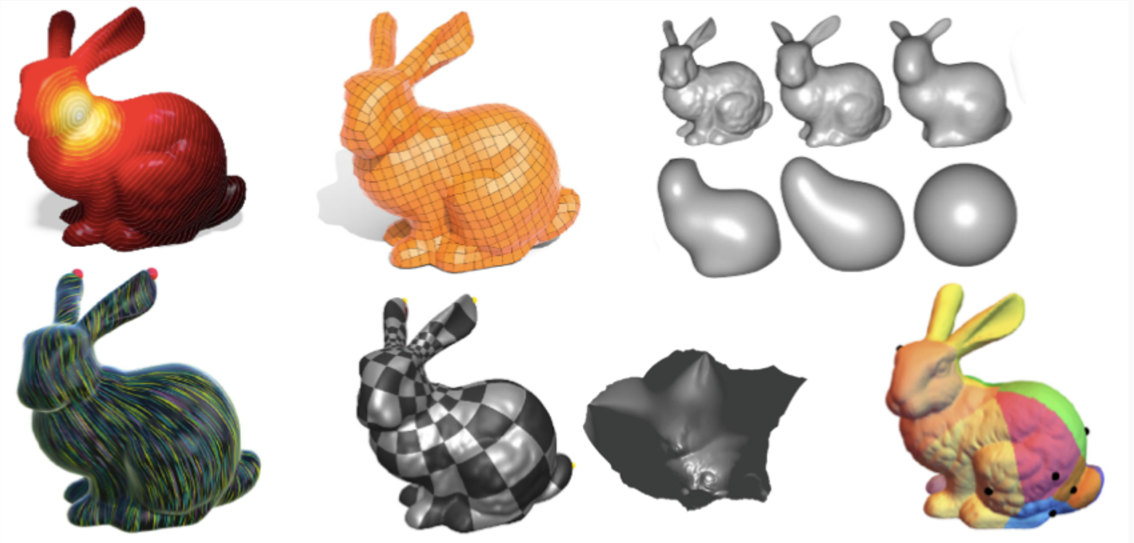


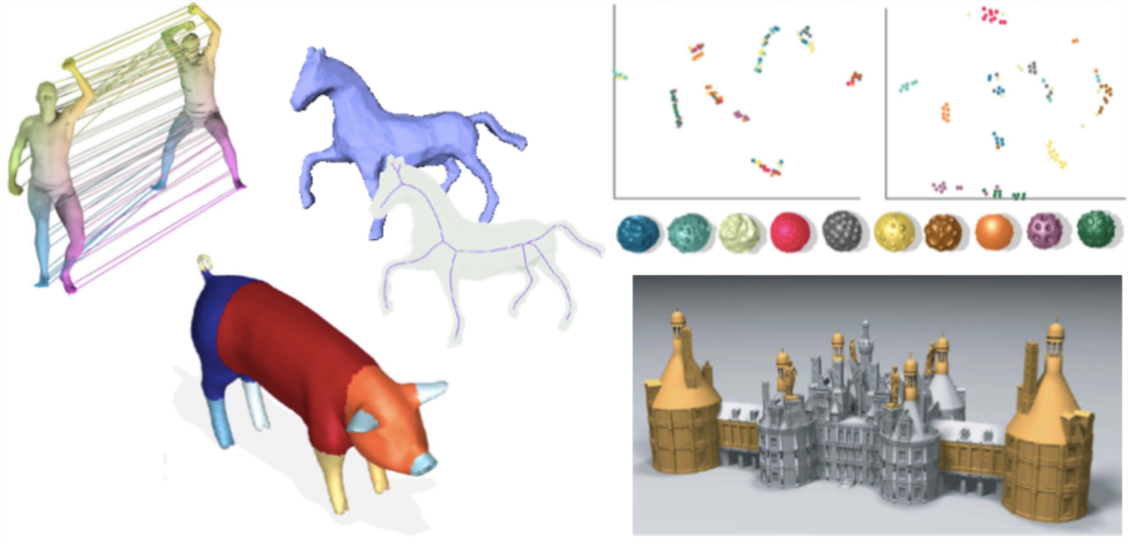
Рис. 1: Поверхность Боя, Обервольфах, Германия и бутылка Клейна

Приложения: Geometry Mesh Processing

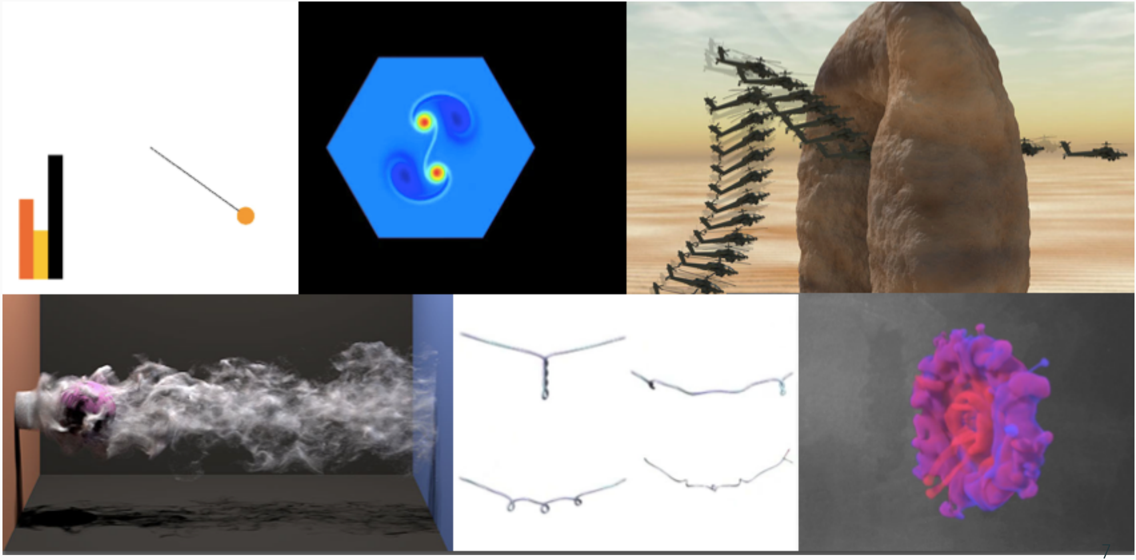


Приложения: Мультимедиа

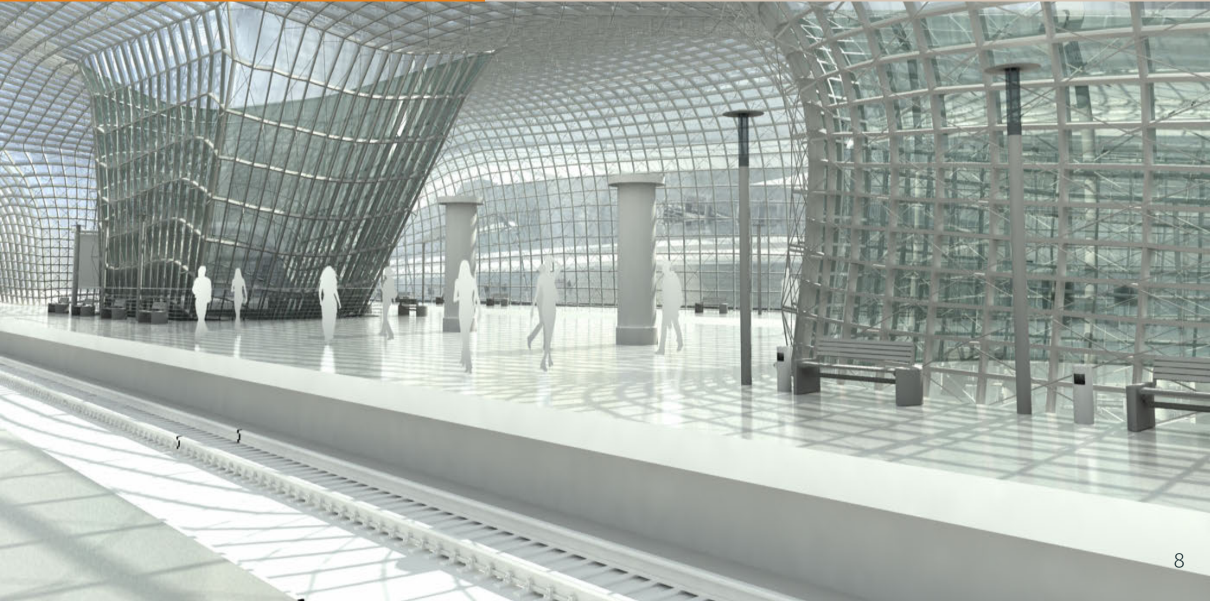
Приложения: анализ форм и изображений



Приложения: симуляции



Приложения: архитектура и дезайн



Организация курса

- **Страница курса:**
  `https://nvbogachev.netlify.com/teaching/gcs18f`
- **Связь:** по почте nvbogach@mail.ru
- **Лекции:** слайды и, возможно, конспекты!
- **Семинары:** листочки с задачами и домашки $(= S)$
- **Лабораторные** работы: CoCalc ... $(= L)$
- **Контрольная** работа: MidTerm $(= M)$
- **Итоговая формула** оценки за зачет:

$$Ex = \lambda_S \cdot S + \lambda_L \cdot L + \lambda_M \cdot M.$$

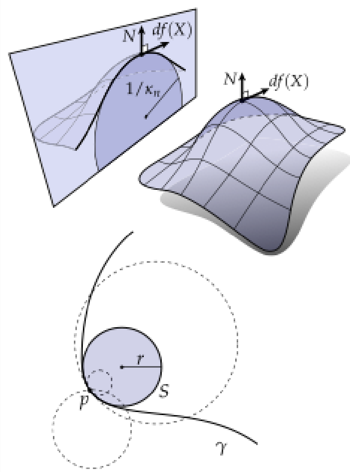
Лабораторные

- Гладкие кривые и поверхности
- Дискретные кривые и поверхности
- Внешние формы
- Дискретные внешние формы
- Лапласиан!
- Сглаживание и деформация

Развитие геометрии

Дифференциальная геометрия – вплоть до 20 века

- Локальные свойства формы
  - Скорость движения вдоль кривой
  - Локальное поведение поверхности и т.д.
- Связь локальных свойств с глобальными
- Всевозможные соотношения и развитие дифференциальной геометрии многообразий



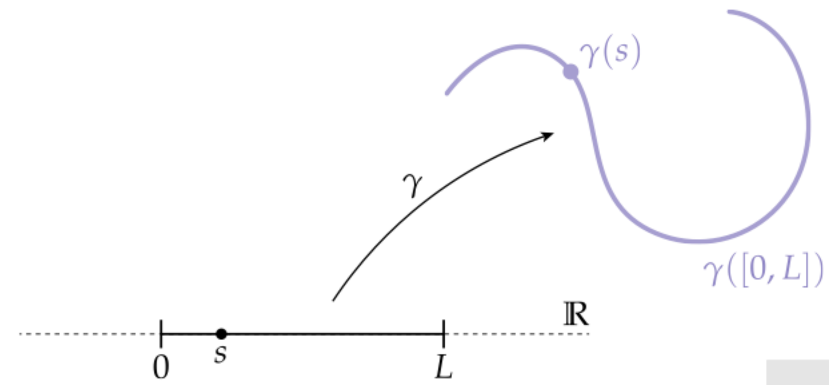
Дискретная дифференциальная геометрия – 21 век

- Никаких больше бесконечностей и производных!
- Все выражается в терминах углов, длин, объемов и т.д.
- Но соблюдение многих «гладких» принципов!
- Развитие Computer Science в 21 веке.

Геометрия плоских кривых

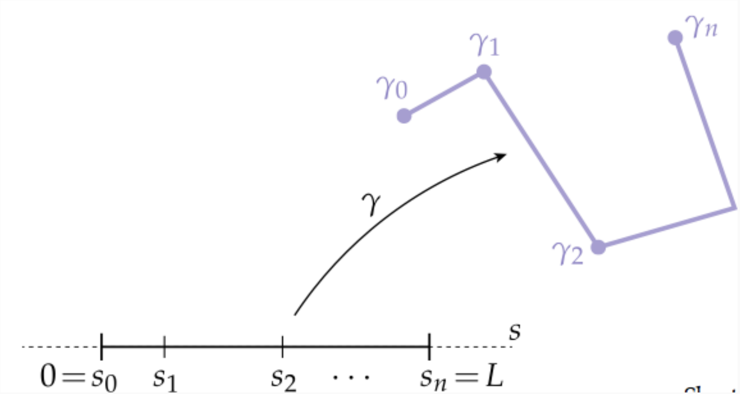
Плоские кривые

- **Гладкая кривая** на $\mathbb{R}^2$ — гладкое отображение $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$
- Вектор **скорости** — $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$.



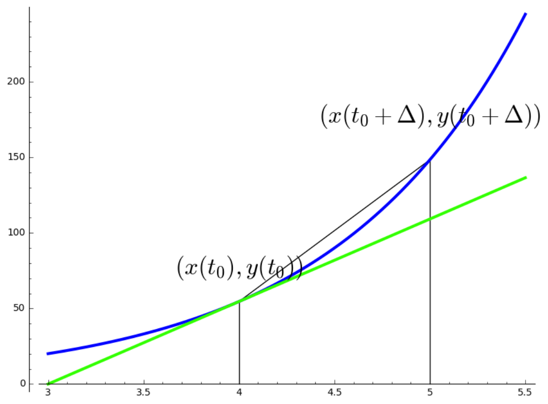
Дискретные кривые

- **Дискретная кривая** на $\mathbb{R}^2$ — кусочно-линейная функция
- Вектор **скорости** — а вот что это?



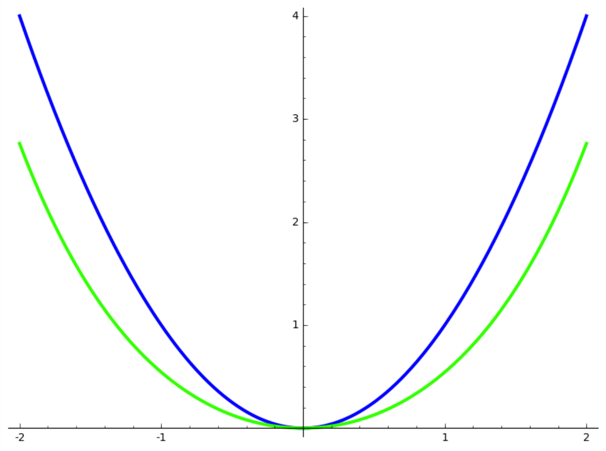
Касательный вектор

- **Касательная** к кривой γ в точке t_0 — предельное положение секущей через точки t_0 и $t_0 + \Delta$ при $\Delta \to 0$.
- Это и есть вектор **скорости**? (Да, и обычно нормируют.)



Определение

Две гладкие регулярные кривые **касаются в точке** P, *если они обе проходят через эту точку и имеют в ней общую касательную.*



Определение

Гладкие регулярные кривые $r_1(s)$ *и* $r_2(s)$ *имеют в точке* 0 **касание порядка** k*, если*

$$r_1(0) = r_2(0), \quad \dot{r}_1(0) = \dot{r}_2(0), \quad \dots, \qquad r_1^{(k)}(0) = r_2^{(k)}(0).$$

Лемма о перпендикулярности

Пусть $a\colon t \mapsto a(t) \in \mathbb{R}^n$ — гладкая вектор-функция, причем $|a(t)| \equiv const$. Тогда $a'(t) \perp a(t)$.

Доказательство.

Продифференцируем $(a(t), a(t)) = const^2$ и получаем $2(a(t), a'(t)) = 0$. $\square$

Теорема (о соприкасающейся окружности)

Пусть $\gamma(s)$ – рег. кривая и $\ddot{\gamma}(s_0) \neq 0$. Тогда $\exists!$ окружность, имеющая в точке s_0 касание второго порядка с γ, причем

(1) ее центр лежит на нормали к кривой в направлении $\ddot{\gamma}(s_0)$,

(2) ее радиус равен $|\ddot{\gamma}(s_0)|^{-1}$.

Кривизна – вторая производная!

Дискретизация

Что такое хорошая дискретизация?

- Удовлетворяет известным гладким соотношениям
- Сходимость при приближении дискретного к гладкому
- Легко вычисляется!

Список литературы:

[1] Keenan Crane — Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction, 2018.

[2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин — Лекции по классической дифференциальной геометрии, 2009, Москва, Логос.
Лекция 1, стр. 5 – 14

[3] А. И. Шафаревич — Курс лекций по классической дифференциальной геометрии, 2007, Москва, МГУ, Механико-математический факультет. *Лекция 1, стр. 3 – 10*