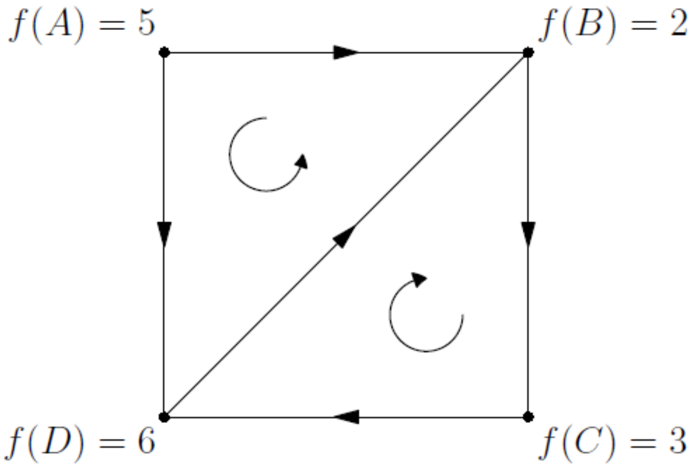
Дискретные внешние формы

ГКП-9, упр.1. Пусть V — сетка с вершинами $A = (0,1)$, $B = (1,1)$, $C = (1,0)$, $D = (0,0)$, а $f\colon V \to \mathbb{R}$ — функция на вершинах, то есть 0-форма, как на рисунке:



(1) Какой формой является df, каковы её области определения и значений? Здесь d — *дискретный* внешний дифференциал.
(2) Вычислите df и $d(df)$.

ГКП-9, упр.2. Для тех же V и f, что в предыдущей задаче, рассмотрим $h\colon V \to \mathbb{R}$ со значениями $h(A) = -3$, $h(B) = 0$, $h(C) = 2$, $h(D) = 3$. Вычислите

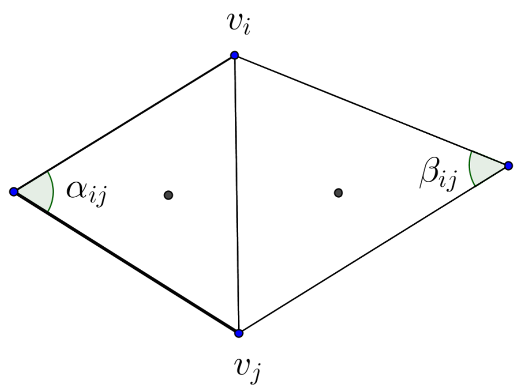
(1) $f \wedge_{0,0} h$,
(2) $w = (df) \wedge_{1,0} h$,
(3) $(dw) \wedge_{2,0} h$,
(4) $(df) \wedge_{1,1} (dh)$.

ГКП-9, упр.3. Пусть $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — дифференциальная 0-форма, заданная формулой $g = y^2(x + 2y)$.

(a) Предъявите дискретизацию формы g на сетке V из предыдущих задач (через значения в вершинах). Обозначим её $\tilde{g}\colon V \to \mathbb{R}$.
(b) Найдите (гладкий) дифференциал dg.
(c) Найдите (дискретный) дифференциал $d\tilde{g}$.
(d) Проинтегрируйте 1-форму из (b) по каждому ребру сетки.

(e) Почему ответы в (c) и (d) оказались одинаковы?

ГКП-9, упр.4. Обозначим углы напротив ребра (v_i, v_j) так, как показано на рисунке.



Используя общую формулу оператора Лапласа

$$\Delta\omega = (\star d \star d + d \star d \star)\omega,$$

выведите дискретную формулу Лапласиана:

$$(\Delta f)_i = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{Area}(v_i^*)} \cdot \sum_j (\mathrm{ctg}\, \alpha_{ij} + \mathrm{ctg}\, \beta_{ij})(f(v_i) - f(v_j)),$$

где f — функция на сетке.