Симплициальные комплексы и дискретные поверхности

(Геометрический) *симплициальный комплекс* — это такой набор симплексов в $\mathbb{R}^n$, что грань каждого симплекса тоже входит в этот набор и пересечение любых двух симплексов является гранью каждого из них.

Симплициальным многообразием называется симплициальный комплекс, у которого звезда каждой вершины (то есть совокупность всех симплексов, содержащих её) гомеоморфна шару. Поверхностью мы называем двумерное многообразие.

Вершина называется *регулярной*, если её степень равна шести.

ГКП-5, упр.1. Пусть L и M являются подкомплексами симплициального комплекса K. Докажите, что $L \cap M$ и $L \cup M$ также являются таковыми.

ГКП-5, упр.2. Постройте *триангуляцию*, то есть гомеоморфизм с симплициальной поверхностью, для
(а) сферы $\mathbb{S}^2$;
(б) тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;

ГКП-5, упр.3. Для выпуклого многогранника, у которого V вершин, E рёбер и F граней, докажите *формулу Эйлера*: $V - E + F = 2$.

ГКП-5, упр.4*. Для симплициальной поверхности (ориентируемой, без края) с g ручками, у которой V вершин, E рёбер и F граней, докажите *формулу Эйлера–Пуанкаре*: $V - E + F = 2 - 2g$.

ГКП-5, упр.5. Докажите, что если каждая вершина симплициальной поверхности (связной, ориентируемой, без края) регулярна, то эта поверхность — тор, т.е. $g = 1$.

ГКП-5, упр.6. Докажите, что при $g \geq 2$ есть хотя бы одна нерегулярная вершина, а при $g = 0$ — хотя бы четыре.

ГКП-5, упр.7. Докажите, что *средняя* степень вершин стремится к 6 при увеличении числа вершин в триангуляции поверхности.