

Кривизны поверхностей

Рассмотрим поверхность $f: U \rightarrow M$. Оператор формы $S: T_p U \rightarrow T_p U$ — это линейный оператор, удовлетворяющий $df(SX) = dN(X)$. Главные кривизны k_1, k_2 и направления X_1, X_2 — это собственные значения и векторы S . Гауссова кривизна $K = k_1 k_2$, средняя кривизна $H = k_1 + k_2$.

ГКП-4, упр.1. Докажите, что для кривизны нормального сечения верно

$$k_n(X) := \frac{\langle df(X), dN(X) \rangle}{\langle df(X), df(X) \rangle}$$

ГКП-4, упр.2. Вторая квадратичная форма определяется по формуле

$$\mathbb{I}(X, Y) := -\langle SX, Y \rangle = -\langle dN(X), df(Y) \rangle.$$

Докажите, что матрица \mathbb{I} квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \langle N, f_{uu} \rangle & \langle N, f_{uv} \rangle \\ \langle N, f_{uv} \rangle & \langle N, f_{vv} \rangle \end{pmatrix}.$$

ГКП-4, упр.3. Докажите, что $\langle SX, Y \rangle = \langle X, SY \rangle$.

ГКП-4, упр.4. Докажите, что $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$.

ГКП-4, упр.5. Пусть e_1 и e_2 — ортогональные касательные векторы единичной длины, приложенные в некоторой точке двумерной гиперповерхности. Докажите, что $H = \mathbb{I}(e_1, e_1) + \mathbb{I}(e_2, e_2)$.

ГКП-4, упр.6. (Формула Эйлера). Пусть T — единичный касательный вектор на поверхности, и пусть $\theta_j = \angle(T, X_j)$. Докажите, что $k_n(T) = k_1 \cos^2 \theta_1 + k_2 \cos^2 \theta_2$.

ГКП-4, упр.7*. (Теорема Менье). Пусть T — вектор скорости кривой μ на поверхности M . Пусть N_μ — вектор главной нормали к μ , $\theta = \angle(N, N_\mu)$. Тогда

$$k_n(T) = k_\mu \cos \theta = \frac{\mathbb{I}(T, T)}{\langle T, T \rangle}.$$

ГКП-4, упр.8*. Пусть две двумерные гиперповерхности M_1 и M_2 пересекаются по кривой γ . Пусть k — кривизна γ , k_j — нормальные кривизны вдоль γ в M_j , а θ — угол между нормальными к M_1 и M_2 . Докажите, что

$$k^2 \sin^2 \theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta.$$

ГКП-4, упр.9*. Пусть k_1, \dots, k_m — нормальные кривизны двумерной гиперповерхности в направлениях, разбивающих касательную плоскость на углы π/m . Докажите, что

$$\frac{k_1 + \dots + k_m}{m} = \frac{H}{2}.$$