

Топология

ГКП-3, упр.1. Докажите, что непрерывный образ компакта — компакт.

ГКП-3, упр.2. Гомеоморфны ли окружность и граница треугольника?

ГКП-3, упр.3*. Рассмотрим буквы T , X , L и E как топологические пространства. Какие из них гомеоморфны друг другу?

ГКП-3, упр.4*. Докажите, что если X компактно, то любое взаимно-однозначное непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, где Y — хаусдорфово.

Кривизны поверхностей

Рассмотрим поверхность $f: U \rightarrow M$. *Оператор формы* $S: T_p U \rightarrow T_p U$ — это линейный оператор, удовлетворяющий $df(SX) = dN(X)$. *Главные кривизны* k_1, k_2 и *направления* — это собственные значения и векторы S . *Гауссова кривизна* $K = k_1 k_2$, *средняя кривизна* $H = k_1 + k_2$.

ГКП-3, упр.5. Возьмите в качестве M либо сферу

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u),$$

либо тор

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u).$$

Вычислите главные кривизны и направления M в точке $f(0, 0)$.

ГКП-3, упр.6. Докажите, что $H^2 \geq 4K$. Когда достигается равенство?

ГКП-3, упр.7*. Вторая квадратичная форма определяется через

$$\mathbb{II}(X, Y) := -g(SX, Y) = -dN(X) \cdot df(Y).$$

Выразите её в координатах. Докажите, что $k_n(X) = \frac{\mathbb{I}(X, X)}{g(X, X)}$.