Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 7: Внешние и дифференциальные формы.

Богачев Николай Владимирович

Московский физико-технический институт,
Кафедра дискретной математики,
Лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

9 ноября 2017 г.

8. Внешние формы.

8.1. Определение.

Пусть V – конечномерное вещественное пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Определение

- **Линейная функция** на V: $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ для всех $u, v \in V$.
- **Двойственное (или сопряженное)** пространство V^* – пространство линейных функций (функционалов) на V.

  (Какова его размерность?)
- **Двойственный базис** пространства V^* (или двойственный к $\{e_1, \ldots, e_n\}$) – это набор функций $\{f_1, \ldots, f_n\}$, где $f_i(e_j) = \delta_{ij}$.

  (Почему это действительно базис?)

  Таким образом, $\dim V^* = \dim V = n$.

Определение

- **Внешняя k-форма** – кососимметрическая полилинейная функция от k аргументов:
  $\omega^k(v_1, \ldots, v_k) = (-1)^\sigma \omega^k(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$;
  $\omega^k(v+u, v_2 \ldots, v_k) = \omega^k(v, v_2, \ldots, v_k) + \omega^k(u, v_2, \ldots, v_k)$.
- **Пространство k-форм** обозначим через $\Lambda^k(V)$.
- Ясно, что $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1(V) = V^*$.
- Можно заметить, что $\Lambda^2(V) \simeq T_E \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ – пространство кососимметрических матриц $n \times n$.

Пример

Определитель $\det(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_k)$.

8.2. Внешнее умножение.

Определение

- **Внешнее умножение 1-форм**:

$$\omega_1^1 \wedge \ldots \wedge \omega_k^1 \, (v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1^1(v_1) & \ldots & \omega_1^1(v_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_k^1(v_1) & \ldots & \omega_k^1(v_k) \end{pmatrix}$$

— k-форма, называемая **мономом**.

8.3. Базис пространства $\Lambda^2(V)$.

Теорема

Множество всех элементарных мономов $f_i \wedge f_j$ при $i < j$ образует базис пространства $\Lambda^2(V)$, то есть $\dim \Lambda^2(V) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Доказательство.

- В силу того, что пространство 2-форм отождествляется с кососимметрическими матрицами в пространстве V, вторая часть утверждения очевидна.
- Рассмотрим произвольную 2-форму $\omega^2(u, v)$. Пусть $u = \sum_i u_i e_i$, $v = \sum_j v_j e_j$, тогда

$$\omega^2(u, v) = \sum_{i<j} u_i v_j \omega^2(e_i, e_j) = \sum_{i<j} u_i v_j \omega_{ij}(f_i \wedge f_j)(e_i, e_j) = \sum_{i<j} \omega_{ij}(f_i \wedge f_j) \left(\sum_k u_k \right.$$

  то есть всякая 2-форма $\omega^2 \in \langle f_i \wedge f_j : i < j \rangle$.
- Остается проверить линейную независимость. Для этого достаточно применить $\sum_{i<j} \lambda_{ij} f_i \wedge f_j$ к паре (e_i, e_j).

∎

8.4. Существование симплектического базиса для 2-формы.

Теорема

Для всякой 2-формы ω^2 существует **симплектический базис** $e'_1, \ldots, e'_n$, в котором $\omega^2 = f'_1 \wedge f'_2 + f'_3 \wedge f'_4 + \ldots + f'_{2k-1} \wedge f'_{2k}$.

Доказательство.

- Всякая 2-форма задается кососимметрической матрицей.
- Существование симплектического базиса для кососимметрической матрицы доказывается по индукции по $n = \dim V$. При $n = 0, 1$ доказывать нечего.
- При $n \geq 2$ существуют такие два вектора e'_1, e'_2, что матрица w^2 при ограничении на $U = \langle e'_1, e'_2 \rangle$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$, и для $U^{\perp}$ выполнено предположение индукции.

$\blacksquare$

8.5. Базис пространства $\Lambda^k(V)$.

Теорема

Множество всех элементарных мономов вида $f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}$ (с различными индексами) составляет базис пространства k-форм $\Lambda^k(V)$, то есть $\dim \Lambda^k(V) = C_n^k$.

Доказательство.

Доказывается аналогично теореме про базис пространства $\Lambda^2(V)$.

Необходимо рассмотреть $\omega^k(v_1, \ldots, v_k)$, где $v_j = \sum_m \lambda_{mj} e_m$ и доказать таким образом, что всякая $\omega^k \in \langle f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k} : j_1 < \ldots < j_k \rangle$.

∎

8.6. Общее внешнее умножение.

Определение

Определим **внешнее умножение двух произвольных** форм ω_1^k и ω_2^m:

$$\omega_1^k \bar{\wedge} \omega_2^m(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+m} \\ \sigma(1)<\ldots<\sigma(k) \\ \sigma(k+1)<\ldots<\sigma(k+m)}} (-1)^\sigma \cdot \omega_1^k(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot \omega_2^m(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+m)}) \quad (1)$$

Теорема

Определенное выше внешнее умножение обладает следующими свойствами:

- Кососоммутативность: $\omega_1^k \bar{\wedge} \omega_2^m = (-1)^{km} \omega_2^m \bar{\wedge} \omega_1^k$
- Дистрибутивность: $(a_1\omega_1^k + a_2\omega_2^k)\bar{\wedge}\omega_3^m = a_1\omega_1^k\bar{\wedge}\omega_3^m + a_2\omega_2^k\bar{\wedge}\omega_3^m$
- Ассоциативность: $(\omega_1^k\bar{\wedge}\omega_2^l)\bar{\wedge}\omega_3^m = \omega_1^k\bar{\wedge}(\omega_2^l\bar{\wedge}\omega_3^m)$.
- На мономах $\omega_1^1 \wedge \ldots \wedge \omega_k^1 = \omega_1^1 \bar{\wedge} \ldots \bar{\wedge} \omega_k^1$.

Доказательство. Самая сложная часть – совпадение разных умножений на мономах.

Для этого достаточно доказать, что новое внешнее произведение двух элементарных мономов (полученных старым умножением) тоже является мономом, то есть

$$(\omega_1^1 \wedge \ldots \wedge \omega_k^1)\bar{\wedge}(\omega_{k+1}^1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k+m}^1) = \omega_1^1 \wedge \ldots \wedge \omega_k^1 \wedge \omega_{k+1}^1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k+m}^1. \quad (2)$$

Правая часть равна $\det(\omega_i^1(v_j))_{k+l}$, а левая часть равна сумме произведений миноров $\sum_\sigma (-1)^\sigma \det(\omega_i^1(v_j))_k \det(\omega_i^1(v_j))_l$, ясно, что они совпадают. ■

8.7. Поведение при отображениях.

Пусть $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – линейное отображение, $\omega^k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.
Тогда на $\mathbb{R}^m$ можно построить k-форму $A^*\omega^k$, определив ее следующим образом:

$$(A^*\omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \omega^k(A(v_1), \dots, A(v_k)).$$

Предложение

Операция $A \mapsto A^*$ удовлетворяет следующим условиям:

- $A^*\omega^k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ – действительно k-форма.
- $A^*\colon \Lambda^k(\mathbb{R}^m) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ – линейный оператор.
- $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.
- $A^*(\omega_1^k \wedge \omega_2^m) = (A^*\omega_1^k) \wedge (A^*\omega_2^m)$.

9. Дифференциальные формы на многообразиях

9.1. Определение.

Простейший пример

Дифференциал функции (например, $f(x) = x^2$).
Имеем $d_x f = 2xdx$, где dx – дифференциал координатной функции, который действует так: $dx(v) = v$.
Видно, что $d_x f$ – функция, линейная по векторам и гладко зависящая от точки x.

Пусть $f: M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция на многообразии M.
Тогда $d_P f$ есть 1-форма на $T_P M$.
Тогда $df: T(M) \to \mathbb{R}$ – есть гладкое отображение, линейное на каждом $T_P M$.

Определение

Дифференциальной 1-формой на многообразии M называется гладкое отображение $\omega^1\colon T(M) \to \mathbb{R}$, линейное на каждом $T_P M$.

Предложение

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – локальные координаты в точке P на многообразии M. Тогда

- $dx_1, \ldots, dx_n$ – двойственный базис в пространстве $\Lambda^1(T_P M)$,
- $\omega^1 = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n$.

Определение

Дифференциальной k-формой на многообразии M называется гладкое отображение $\omega^k\colon T(M) \to \mathbb{R}$, являющееся внешней k-формой на каждом $T_P M$.

Предложение

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – локальные координаты в точке P на многообразии M. Тогда

- мономы вида $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_n}$ образуют базис в пространстве $\Lambda^k(T_P M)$,
- $\omega^k = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} a_{j_1,\ldots,j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$.