Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 6: Многообразия. Продолжение.

Богачев Николай Владимирович

Московский физико-технический институт,
Кафедра дискретной математики,
Лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

19 октября 2017 г.

7.4. Проективное пространство.

Проективное пространство

Проективное n-мерное пространство $\mathbb{RP}^n = \{\ell \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \{0\} \in \ell\}$ является гладким $(n+1)$-мерным многообразием.

Доказательство.

- Почему оно вообще пространство? И какое?
- Пусть $p, q \in \mathbb{RP}^n$. Тогда $\rho(p, q) = \angle(p, q)$ – метрика.
- Рассмотрим карты U_j, состоящие из прямых, не перпендикулярных векторам $e_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ соответственно. Иными словами, $\ell = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in U_j$, если $x_j \neq 0$.
- Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi_j \colon U_j \to \mathbb{R}$, где

$$\varphi(\ell) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$

- Теперь надо рассмотреть функции склейки $\varphi_{ij} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$.
- Пусть $\ell \in U_i \cap U_j$. Тогда

$$\varphi_i(\ell) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right) = (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

$$\varphi_j(\ell) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j} \right) = (b_0, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n).$$

- Ясно, что $b_k = \frac{a_k}{a_j}$ при $k \neq i$ и $b_i = \frac{1}{a_j}$.

■

7.5. Касательное расслоение.

Касательное расслоение

$$T(M) = \bigcup_{P \in M} T_P M$$

Доказательство.

- Пусть $\pi\colon T(M) \to M$ – такое отображение, что $\pi(v) = P$, где $v \in T_P M$.
- Пусть U – карта с локальными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, $TU = \pi^{-1}(U)$.
- Определим $\Phi\colon TU \to \mathbb{R}^{2n}$ так, что $\Phi(v) = (p_1, \ldots, p_n, v_1, \ldots, v_n)$.
- Ясно, что Φ – биекция.
- Введем на $T(M)$ топологию так, чтобы для каждой карты U отображение Φ было открытым.
- То есть $W \in \tau(T(M))$, если $\Phi(W \cap TU) \in \tau(\mathbb{R}^{2n})$ для всякого U.

- Более того, если $\{U_\alpha\}$ – атлас на M, то $\{(TU_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ – атлас на $T(M)$.
- Осталось проверить функции склейки. Пусть $W_1 = (TU_1, \Phi_1)$, $W_2 = (TU_2, \Phi_2)$ (причем $U_1 \cap U_2$ непусто).
- Пусть $(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$, $(y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n)$ – соответствующие координаты. Тогда $y_k = y_k(x_1, \dots, x_n)$, $v_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j} u_j$.
- Ясно, что эти функции гладкие. То есть $T(M)$ – гладкое многообразие, причем $\dim T(M) = 2n$.

■

Например, множество положений механической системы – **конфигурационное пространство**.
Если еще рассмотреть их скорости, то получаем **фазовое пространство**, что и есть касательное расслоение.

7.6. Прообраз регулярного значения.

Напоминание

- Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий.
- Тогда $dF(P)$ – дифференциал отображения F в точке P.
- Пусть γ – кривая на M, v – ее касательный вектор. Тогда $F(\gamma)$ – кривая на N, и пусть w – касательный вектор.
- Ясно, что $v \in T_P M$, $w \in T_{F(P)} N$.
- Напомним, что $dF(P)(v) = w$. То есть $dF(P)\colon T_P M \to T_{F(P)} N$, причем матрица этого линейного отображения равна $J(F)(P)$.

Определение

- **Регулярная точка** – точка $P \in M$, в которой отображение dF сюръективно.
- **Критическая (особая) точка** – не регулярная.
- **Регулярное значение** – такая точка $Q \in N$, что все точки из прообраза $F^{-1}(Q)$ регулярны.
- **Критическое значение** – не регулярное.

Теорема о прообразе регулярного значения

Пусть $Q \in N$ – регулярное значение гладкого отображения F. Тогда $W = F^{-1}(Q)$ – гладкое многообразие размерности $\dim M - \dim N$.

Доказательство.

- Пусть $P \in W$. В локальных координатах $y_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.
- Пусть $U \subset W$ – окрестность точки P, $\tilde{U}$ – ее гомеоморфный образ в $\mathbb{R}^m$.
- $\tilde{U}$ задается в $\mathbb{R}^m$ набором уравнений: $f_j(x_1, \ldots, x_m) = y_j(Q)$.
- Q – регулярное значение, следовательно, $\mathrm{rk}\ J(F)(P) = \dim N = n$.
- По теореме из Лекции 5 $\tilde{U}$ – гладкое многообразие, причем $\dim \tilde{U} = m - \mathrm{rk}\ J(F)(P) = m - n$.
- Композиция гомеоморфизмов для $\tilde{U}$ и гомеоморфизма $U \to \tilde{U}$ дает атлас на W.

■

7.7. Погружение и вложение.

Определение

- **Погружение –** такое гладкое отображение F, что в каждой точке $P \in M$ отображение $dF(P)$ является биекцией.

  (Это означает, что $\dim M \leq \dim N$)
- **Вложение –** это погружение, при котором M гомеоморфно $F(M)$.

Пусть $F\colon M \to N$ – произвольное погружение.

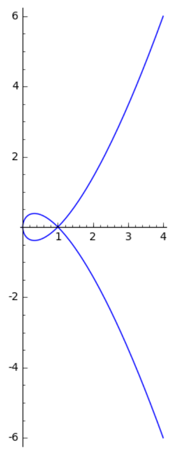
По теореме о неявной функции у каждой точки P существует такая окрестность U, что $F|_U$ – гомеоморфизм.

То есть локально всякое погружение является вложением.

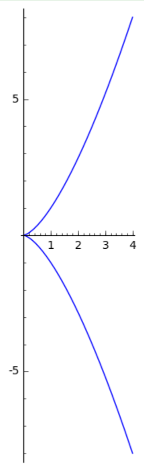
7.8. Примеры вложений и погружений.

Примеры

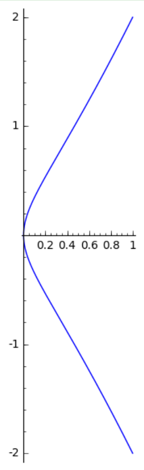
Отображения $F_a\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, где $F(x) = (x^2, x^3 + ax)$. Ясно, что $J(F) = (2x, 3x^2 + a)$. Если $a \neq 0$, то F_a – погружение. F_a - вложение $\Leftrightarrow a > 0$.



$a = -1$



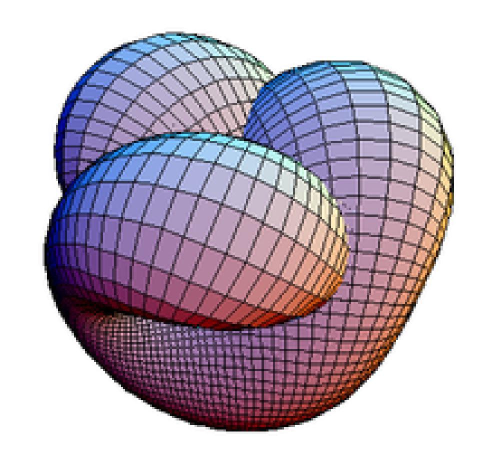
$a = 0$



$a = 1$

Примеры

Поверхность Боя – погружение $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^3$.



7.9. Риманово многообразие и метрика.

Определение

- **Риманово многообразие –** гладкое многообразие, для каждой точки P снабженное симметрической положительной определенной билинейной формой в $T_P M$, гладкой зависящей от P.

  В локальных координатах: $g_{kl}(x_1, \ldots, x_m)$, $k, l \leq m$. Форму $g(x, y)$ называют **римановой метрикой**.
- **Изометрическое** вложение – это вложение, сохраняющее длины гладких кривых.

Примеры

- Поверхности с I квадратичной формой.
- Вложение многообразия в $\mathbb{R}^n$ позволяет индуцировать метрику.

7.10. Знаменитые теоремы вложения.

Теорема Уитни, 1938

Всякое гладкое n-мерное многообразие можно вложить в $2n$-мерное вещественное пространство.

Теорема Нэша, 1956

Всякое n-мерное риманово многообразие можно изометрически вложить в $\mathbb{R}^m$, где $m = \frac{3n^2+14n^2+11}{3}$.