Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 6: Многообразия

Богачев Николай Владимирович

Московский физико-технический институт,
Кафедра дискретной математики,
Лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

12 октября 2017 г.

7. Многообразия

7.1. Определения

Воспоминания из прошлого

Всякая выпуклая ограниченная открытая область $U \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфна открытому n-мерному шару B^n.

Доказательство.

- Можно считать, что $B^n \subset U$.
- Для всякой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственное такое число $a(x) > 0$, что
$$a(x)\frac{x}{\|x\|} \in \partial U.$$
- Тогда рассмотрим гомеоморфизм $\varphi\colon U \to B^n$, где
$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) = \frac{x}{a(x)}.$$

■

Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Определение

- **Карта** на M — гомеоморфизм φ некоторого открытого множества $U \subset M$ на некоторую открытую область в $\mathbb{R}^n$.
- Карты (U, φ) и (V, ψ) называются **согласованными**, если отображение

$$\psi\varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

  является гладким.
- **Атлас** — система согласованных карт, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ покрывающих пространство M.
- Два атласа $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (V_β, ψ_β) **эквивалентны**, если карты одного согласованы со всеми картами второго, то есть функции "склейки"

$$\psi_\beta\varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)$$

  гладкие.

Определение

Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой вместе с классом эквивалентных атласов называется n**-мерным гладким вещественным многообразием**.

Примеры

(1) $\mathbb{R}^n$. Здесь достаточно взять карту $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$;

(2) Можно взять произвольную открытую область $U \subset \mathbb{R}^n$;

(3) $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\}$.

Доказательство. Пусть $N = \{0, \ldots, 0, 1\}$ и $S = \{0, \ldots, 0, -1\}$. Рассмотрим стереографические проекции φ_N и φ_S из точек N и S соответственно. Имеем две карты $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ и $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$. Докажите, что это дает определение многообразия. ■

(4) $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det(A) \neq 0\}$.

Вопрос

Почему же n во всех картах в определении многообразия берут одинаковое? Можно ли брать карты разной топологической размерности?

Ответ. На самом деле для связных многообразий нельзя. Иначе мы получим, что $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ гомеоморфны при $n \neq m$, что неверно.
Но увы, это доказывается более продвинутыми методами.

Определение

- Локальные координаты в окрестности точки P — координаты в образе карты $\varphi(U)$.
- Если $P \in U \cap V$, то имеются две системы координат, причем функции $y_j(x_1, \ldots, x_n)$ — гладкие.
- Структура многообразия на $M_1 \times M_2$: $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$
- Касательный вектор в точке P – вектор в $\mathbb{R}^n$, приложенный к локальным координатам точки P.
- Касательное пространство $T_P M$ — множество всех касательных векторов.

7.2. Функции и отображения на многообразиях

Определение

- Пусть функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывна, тогда ее координатным представлением на карте (U, φ) называется функция $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$.
- Аналогично, если имеется непрерывное отображение многообразий $F\colon M^n \to N^k$, то можно его сузить на карты и рассматривать отображение $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- Функции или отображения называем гладкими, если таковыми являются их координатные представления.
- Если $F\colon M \to N$ — гладкий гомеоморфизм, причем F^{-1} — тоже гладкое, то F — диффеоморфизм многообразий.
- $J(F)$ — матрица Якоби отображения F (то есть его координатного представления).

Теорема

Если многообразия M и N диффеоморфны, то их размерности совпадают.

Доказательство.

- Пусть $P \in M$, $F(P) = Q \in N$, $\dim M = m$, $\quad \dim N = n$.
- Известно, что $J(G \circ F)(P) = J(G)(F(P)) \cdot J(F)(P)$
- Тогда применим это к $F \circ F^{-1}$ и $F^{-1} \circ F$:

$$E_m = J(F^{-1})(Q) \cdot J(F)(P), \quad E_n = J(F)(P) \cdot J(F^{-1})(Q).$$

- Известно, что $\mathrm{rk}\,(AB) \le \min(\mathrm{rk}\,A, \mathrm{rk}\,B)$. В данном случае $\mathrm{rk}\,J(F)(P) \le \min(m, n)$, $\mathrm{rk}\,J(F^{-1})(Q) \le \min(m, n)$.
- Отсюда $m \le \min(m, n)$, $\quad n \le \min(m, n)$. Следовательно, $m = n$.

∎

7.3. Задание многообразий уравнениями

Пусть задана система уравнений $f_j(x_1, \ldots, x_n) = c_j$, где $j = 1, \ldots, k$, а M — множество ее решений. Обозначим $F = (f_1, \ldots, f_k)$.

Теорема

Если $\mathrm{rk}\ J(F) = k$ в каждой точке M, то M является гладким многообразием размерности $n - k$, причем система линейных уравнений $df_j = 0$ задает касательное пространство в каждой точке многообразия.