Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 3: Геометрия поверхностей и общая топология

Богачев Николай Владимирович

Московский физико-технический институт,
Кафедра дискретной математики,
Лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

28 сентября 2017 г.

4. Геометрия поверхностей

4.5. Напоминание.

- **канонический** базис $\{e_1, \ldots, e_N\}$
- **Гиперповерхность**: $\dim M = N$, где $M \subset \mathbb{R}^{N+1}$.
- вектор **нормали** n.
- *I* **квадратичная форма** $g(x,x)$: матрица $G = G(e_1, \ldots, e_N)$.
- *II* **квадр. форма** $b(x,x)$: матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j}, n\right)$.
- $\tilde{k}(\gamma)$ — **кривизна нормального сечения со знаком**, если нормали кривой и поверхности сонаправлены, то ставим $+$, иначе $-$.
- **(Теорема Менье)** Пусть v — вектор скорости в т. P кривой μ на поверхности M, γ — нормальное сечение M плоскостью $\langle n, v\rangle$. Пусть $n(\mu)$ — вектор главной нормали к μ, $\theta = \angle(n, n(\mu))$. Тогда
$$\tilde{k}(\gamma) = k(\mu)\cos\varphi = \frac{b(v,v)}{g(v,v)}.$$

4.6. Главные кривизны и направления.

Теорема

Существует ортонормированный базис $\{e'_1, \dots, e'_N\} \in T_P M$, в котором матрица I квадр. формы равна E, а матрица II формы — $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, причем λ_j — корни уравнения $\det(B - \lambda G) = 0$.

Доказательство.

- $\exists$ ортонормированный базис $\{e''_1, \dots, e''_N\} \in T_P M$: в нем матрица I формы равна E, а у второй какая-то.
- Сделаем ортогональное преобразование, приводящее матрицу II формы к диагональному виду. Тогда матрица первой формы по-прежнему останется равной E.
- Пусть B'' – матрица II формы в базисе $\{e''_1, \dots, e''_N\}$, а C — матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_N\}$ к $\{e''_1, \dots, e''_N\}$. Тогда $B'' = C^T BC$, $E = C^T GC$, откуда

$$0 = \det(B'' - \lambda E) = \det(C^T BC - \lambda C^T GC) = (\det C)^2 \det(B - \lambda G).$$

■

Следствие

Столбцы $a_1, \dots, a_N$ координат векторов $e'_1, \dots, e'_N$ в базисе $\{e_1, \dots, e_N\}$ — нуль-векторы матрицы $(B - \lambda_j G)$, то есть $(B - \lambda_j G)a_j = 0$.

Доказательство.

- Пусть $q_1, \dots, q_N$ — столбцы координат векторов $e'_1, \dots, e'_N$ в базисе $\{e''_1, \dots, e''_N\}$. Тогда $(B'' - \lambda_j E)q_j = 0$.
- Но $a_j = Cq_j$, откуда

$$0 = (B'' - \lambda_j E)q_j = C^T(B - \lambda_j G)Cq_j = C^T(B - \lambda_j G)a_j.$$

■

Определение

Главные направления — $e'_1, \dots, e'_N$
Главные кривизны — $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.

Теорема (об экстремальных значениях нормальных кривизн)

Пусть $k_1 = \min_{v \in T_P M} \tilde{k}(v)$, $k_2 = \max_{v \in T_P M} \tilde{k}(v)$, где $\|v\| = 1$. Тогда $k_1, k_2 \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$.

Доказательство.

- Пусть $\alpha_j := \angle(v, e_j)$, тогда $v = \sum_{j=1}^N e_j \cos \alpha_j$.
- Тогда $\tilde{k}(v) = \frac{b(v,v)}{g(v,v)} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \cos^2 \alpha_j$ (**формула Эйлера**).
- Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_j$. Заметим, что $1 = (v, v) = \sum_{j=1}^N \cos^2 \alpha_j$, откуда $\cos^2 \alpha_1 = 1 - \sum_{j=2}^N \cos^2 \alpha_j$
- $\tilde{k}(v) = \lambda_1 - \sum_{j=2}^N (\lambda_1 - \lambda_j) \cos^2 \alpha_j \leq \lambda_1$
- Причем $\tilde{k}(v) = \lambda_1$ для $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_N = \frac{\pi}{2}$.

  С минимальной кривизной аналогично.

■

Определение

- **Средняя кривизна** — $H = \lambda_1 + \ldots + \lambda_N$.
- **Гауссова кривизна** — $K = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_N$.

Предложение

$$H = \mathrm{tr}\,(BG^{-1}), \quad K = \det(BG^{-1}) = \frac{\det B}{\det G}$$

Доказательство.

$$0 = \det(B - \lambda G) = \det(BG^{-1} - \lambda E)\det G$$

■

5. Элементы общей топологии

5.1. Определения.

Определение

Топологическое пространство — множество X с выделенным семейством τ его подмножеств, для которого верно

$$(1)\ \emptyset, X \in \tau; \quad (2)\ A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau; \quad (3)\ \forall \alpha\ X_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha X_\alpha \in \tau.$$

Множества из τ называются **открытыми**, а само τ — **топологией.**

Примеры

(1) $\tau = (\emptyset, X)$ – **минимальная (тривиальная)** топология
(2) $\tau = 2^X$ – **максимальная (дискретная)** топология
(3) топология **метрического** пространства (стандартный пример — $\mathbb{R}^n$).

Определение

Топологическое пространство (X, τ) называется **отделимым** или **хаусдорфовым**, если для всяких двух различных точек $x, y \in X$ найдутся такие непересекающиеся открытые множества A и B, что $x \in A$, $y \in B$.

Примеры

(1) $\tau = (\emptyset, X)$ – минимальная (тривиальная) топология **не является** хаусдорфовой
(2) $\tau = 2^X$ – максимальная (дискретная) топология хаусдорфова
(3) метрические пространства всегда хаусдорфовы.

Определение

Основные понятия, аналогичные понятиям из топологии в $\mathbb{R}^n$.

- **Замкнутое** множество — дополнение к которому открытое;
- Точка x называется **предельной** для множества $A \subset X$, если во всяком открытом множестве, содержащем эту точку, есть элемент из A, отличный от x;
- Точка $a \in A$ называется **изолированной** точкой множества A, если у нее есть окрестность, в которой нет других точек из A;
- **Замыкание** $\overline{A}$ множества A есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Ясно, что $\overline{A}$ получается из A добавлением всех предельных точек;
- Если $\overline{A} = X$, то A называют **всюду плотным** в X.
- Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ называется **непрерывным в точке** $x \in X$, если для всякого открытого $V \subset Y$, такого что $f(x) \in V$, найдется такое открытое $U \subset X$, что $f(U) \subset V$.

Определение

- $f: X \to Y$ — **непрерывно**, если оно непрерывно в каждой точке.
- Отображение $f: X \to Y$ – **гомеоморфизм**, если оно биективно, непрерывно и имеет непрерывную обратную функцию.
- Множество в топологическом пространстве называется **компактным (или компактом)**, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Список литературы

[1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин — Лекции по классической дифференциальной геометрии, 2009, Москва, Логос.
Лекции 4, 10.

[2] А. И. Шафаревич — Курс лекций по классической дифференциальной геометрии, 2007, Москва, МГУ, Механико-математический факультет.
Лекции 5, 12.

[3] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов — Действительный и функциональный анализ: университетский курс, 2-е изд., М-Ижевск, 2011.
Глава 1.