Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 2: Геометрия пространственных кривых и поверхностей

Богачев Николай Владимирович

Московский физико-технический институт,
Кафедра дискретной математики,
Лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

14 сентября 2017 г.

3. Геометрия пространственных кривых

3.1. Касательная, нормальная плоскость, кривизна

Теперь мы рассматриваем кривые $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \subset \mathbb{R}^3$.

Определение

Гладкая регулярная пространственная кривая — гладкое отображение $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$, у которого вектор скорости $\gamma'(t) \neq 0$.

Определение

Длина кривой —

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Натуральный параметр s определяется аналогично плоскости:

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau.$$

Определение

Нормальная плоскость к кривой — плоскость, перпендикулярная касательной.

Определение

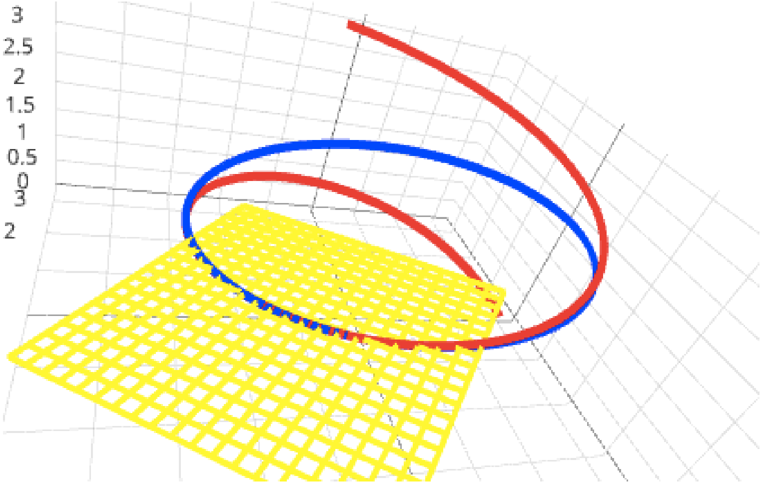
Кривизна пространственной кривой — $k(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$.

Теорема-задача

Доказать аналогичную теорему про соприкасающуюся с данной кривой в точке s_0 окружность: ее центр лежит в направлении вектора $\ddot{\gamma}(s_0)$, а радиус равен $1/|k(s_0)|$.

Определение

Плоскость векторов $\dot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$ называется **соприкасающейся.**



3.2. Кручение и формулы Френе.

Изучим кривую в точках, где $\ddot{\gamma}(s) \neq 0$.

Определение

Репер Френе — ортонормированная тройка $\{v(s), n(s), b(s)\}$, где
$v(s) = \dot{\gamma}(s)$ — единичный вектор **скорости**,
$n(s) = \dfrac{\ddot{\gamma}(s)}{k(s)}$ — вектор **главной нормали**,
$b(s) = [v(s), n(s)]$ — вектор **бинормали** к кривой.

Теорема (формулы Френе)

$$\begin{pmatrix} \dot{v}(s) \\ \dot{n}(s) \\ \dot{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}$$

Здесь $\tau(s)$ – гладкая функция во всех точках ненулевой кривизны, называемая **кручением**.

Доказательство.

- Пусть $Q(s) = (v(s), n(s), b(s))^T \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Ясно, что $Q(s)Q(s)^T = E$
- Отсюда $\dot{Q}(s)Q(s)^T = -Q(s)^T\dot{Q}(s)$, то есть $A(s) = \dot{Q}(s)Q(s)^T$ – кососимметрическая матрица.
- Поскольку $\dot{v}(s) = k(s)n(s)$, то первая строка матрицы $A(s)$ имеет вид $(0, k(s), 0)$.

∎

Теорема (вычисление кривизны и кручения)

Пусть кривая $\gamma(t)$ задана произвольным параметром. Тогда

$$k(t) = \frac{\|[\gamma'(t), \gamma''(t)]\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|[\gamma'(t), \gamma''(t)]\|^2}.$$

Теорема (о восстановлении кривой по кривизне и кручению)

Пусть $k(s) > 0$ и $\tau(s)$ – гладкие функции. Тогда $\exists!$ с точностью до изометрии кривая $\gamma(s) \subset \mathbb{R}^3$, для которой эти функции являются кривизной и кручением соответственно.

4. Геометрия поверхностей в $\mathbb{R}^N$

4.1. Задание поверхности. Координаты.

Определение

Гладкая регулярная n**-мерная поверхность** в $\mathbb{R}^N$ — гладкое отображение $r\colon U \to \mathbb{R}^N$, где U — некоторая открытая область в $\mathbb{R}^n$ с координатами $(u_1, \dots, u_n)$, причем во всех точках векторы $e_1 = \frac{\partial r}{\partial u_1}, \dots, e_n = \frac{\partial r}{\partial u_n}$ образуют **канонический** базис.

Обозначения:
$M = r(U) = r(u_1, \dots, u_n) = (r_1(u_1, \dots, u_n), \dots, r_N(u_1, \dots, u_n)) \subset \mathbb{R}^N$.
Система $\{e_1, \dots, e_n\}$ линейно независима $\Leftrightarrow$ **ранг матрицы Якоби**

$$J(r(u)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial r_N}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_1}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial r_N}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

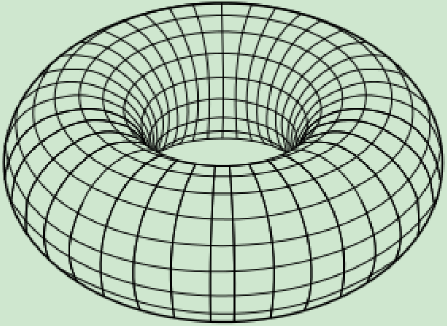
максимален (то есть равен n).

Пример

Убедитесь, что параметризация тора

$$r(u,v) = ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)$$

удовлетворяет определению.



4.2. Кривые на поверхности. Касательное пространство.

Определение

Гладкая **кривая на поверхности** M — композиция $r(u(t))$ гладкой кривой $u\colon [a,b] \to U$ и отображения $r\colon U \to M$).

Каждому каноническому базисному вектору $e_j(P)$ ставится в соответствие своя **координатная линия** $u_j(t) = p_j + te_j$, где $P = r(p_1, \ldots, p_n)$.

Пусть P – фиксированная точки поверхности.

Определение

Касательное пространство $T_P M$ к поверхности M в точке P — совокупность касательных векторов к кривым на M, проходящим через точку P, где касательные векторы откладываются от точки P.

Почему же оно называется пространством?

Теорема

$T_P M = \langle e_1(P), \ldots, e_n(P) \rangle$ и $\dim T_P M = n$.

Доказательство. Пусть $r(u(t))$ — кривая, проходящая при $t = 0$ через точку P. Ее вектор скорости имеет вид:

$$v(0) = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial r}{\partial u_j}\right|_P u_j'(0) = \sum_{j=1}^{n} u_j'(0) \cdot e_j(P) \in \langle e_1(P), \ldots, e_n(P) \rangle.$$

Обратно, всякая линейная комбинация векторов $e_1(P), \ldots, e_n(P)$ соответствует вектору скорости какой-то кривой.

Почему?

Потому что мы можем взять кривую $u(t) = (p_1 + \lambda_1 t, \ldots, p_n + \lambda_n t)$. ∎

Определение

Нормальное пространство к M в точке P — это $(T_P M)^\perp$.

Заметим, что при замене координат на поверхности матрица Якоби замены будет служить матрицей перехода между каноническими базисами.

Действительно, пусть u и v — два набора координат на поверхности, такие, что $u_j(v_1, \ldots, v_n)$ — гладкие функции и $\det J(u(v)) \neq 0$.

Пусть $e_j = \frac{\partial r}{\partial u_j}$, $f_j = \frac{\partial r}{\partial v_j}$ — соответствующие канонические базисы.

Тогда $f_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial v_k} e_j$

4.3. Первая квадратичная форма.

Пусть задана поверхность $M = r(U) \subset \mathbb{R}^N$ и пусть $P \in M$. На $T_P M \subset \mathbb{R}^N$ имеется евклидово скалярное умножение $(\cdot, \cdot)$.

Определение

Пусть G — матрица Грама канонического базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то есть $g_{ij} = (e_i, e_j)$.
Квадратичная форма, матрица которой в этом базисе равна G, называется **первой квадратичной формой** поверхности M в точке P.

При замене координат $u = u(v)$ имеем

$$\tilde{g}_{ij} = (f_i, f_j) = \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \frac{\partial u_m}{\partial v_j} g_{km}.$$

Заметим, что это соответствует формуле замены матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису:

$$\tilde{G} = J^T G J,$$

где $J = J(u(v))$ — матрица Якоби.

Предложение

Пусть $a, b \in T_P M$, $a = \sum_{j=1}^n a_j e_j$, $b = \sum_{j=1}^n b_j e_j$. Тогда

$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} a_i b_j, \quad |a| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} a_i a_j}$$

Предложение

Пусть $\varphi(t) = r(u(t))$ – кривая на M. Тогда длина дуги кривой от t_1 до t_2 вычисляется по формуле:

$$L(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(r(u(t))) u_i'(t) u_j'(t)}\; dt$$

4.4. Вторая квадратичная форма поверхности.

Определение

Гиперповерхность — поверхность размерности $N-1$ в $\mathbb{R}^N$.

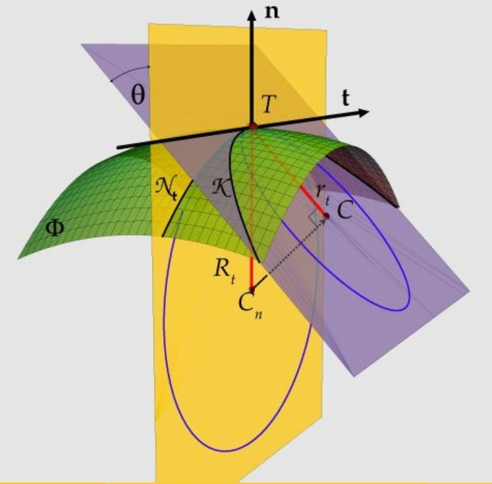
Далее рассматриваем только гиперповерхности. В этом случае однозначно определяется вектор нормали $n(P)$.

Определение

Пусть $b_{ij}(P) = \left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j}(P), n(P)\right)$ и $B(P) = (b_{ij}(P))$. Тогда квадратичная форма, матрица которой в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ равна $B(P)$, называется **второй квадратичной формой** поверхности в точке P.

Теорема Менье

Пусть t — вектор скорости в T кривой $\mathcal{K}$ на Φ, $\mathcal{N}_t$ — нормальное сечение поверхности плоскостью $\langle n, t\rangle$, $n(\mathcal{K})$ — вектор главной нормали к $\mathcal{K}$, $\theta = \angle(n, n(\mathcal{K}))$. Тогда $k(\mathcal{N}_t) = k(\mathcal{K})\cos\theta = \dfrac{b(t,t)}{g(t,t)}$.



Доказательство. Пусть $\mathcal{K}(s) = r(u(s))$, $\mathcal{N}_t(s) = r(v(s))$

$$\ddot{\mathcal{K}}(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial(r \circ u)}{\partial s}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j} \dot{u}_i \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n} e_k \ddot{u}_k,$$

аналогично

$$\ddot{\mathcal{N}}_t(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial v_i \partial v_j} \dot{v}_i \dot{v}_j + \sum_{k=1}^{n} e_k \ddot{v}_k$$

Поскольку $e_k \perp n$, то

$$(\ddot{\mathcal{K}}(s), n) = (k(\mathcal{K})n(\mathcal{K}), n) = k(\mathcal{K})\cos\theta = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(P)\dot{u}_i \dot{u}_j = b(t,t),$$

$$(\ddot{\mathcal{N}}_t(s), n)) = k(\mathcal{N}_t) = b(t,t),$$

откуда

$$k(\mathcal{N}_t) = k(\mathcal{K})\cos\theta = b(t,t).$$

Остается вспомнить, что $g(t,t) = 1$. ■

Список литературы

[1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин — Лекции по классической дифференциальной геометрии, 2009, Москва, Логос.
Лекции 2,3,4.

[2] А. И. Шафаревич — Курс лекций по классической дифференциальной геометрии, 2007, Москва, МГУ, Механико-математический факультет.
Лекции 2,3,4.