Геометрия в компьютерных приложениях

Лекция 1: Введение и геометрия плоских кривых

Богачев Николай Владимирович

Московский физико-технический институт,
Кафедра дискретной математики,
Лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

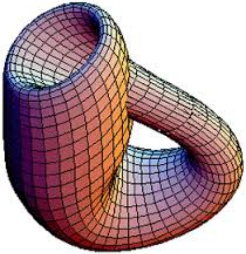
7 сентября 2017 г.

1. Введение

1.1. Основные цели курса.

- Освоить абстрактные геометрические структуры:
  - кривые, поверхности, многообразия
  - касательные пространства и расслоения

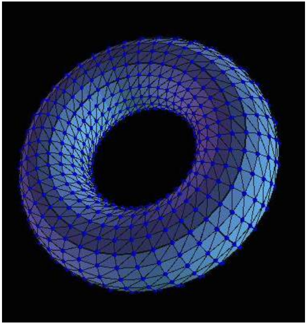
Поверхность Боя, Обервольфах, Германия

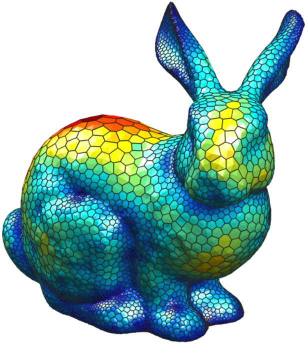


Бутылка Клейна

- Понять, где это может быть полезным
    - распознавание образов и компьютерная геометрия
    - мультимедиа
    - робототехника
    - теория игр
    - сенсорные сети
    - ранжирование
    - геометрия многообразий и топология
    - гиперболическая геометрия
    - группы Ли
    - геометрия дискретных групп (в частности, группы отражений)

- Вычисления: как научить компьютер использовать геометрию?





- Дискретизация поверхностей vs. непрерывная дифференциальная геометрия.

1.2. Обозначения:

- $\mathbb{R}$ – вещественная прямая
- $\mathbb{R}^n$ – n-мерное вещественное пространство
- $\mathbb{S}^n$ – n-мерная сфера
- $C^k(D)$ — множество всех k раз дифференцируемых функций на множестве D
- $C^\infty(D)$ — множество всех гладких функций
- $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ — вещественное и комплексное проективные пространства
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ — группа вещественных матриц с ненулевым определителем
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = E\}$ — ортогональная группа
- $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ — специальная ортогональная группа

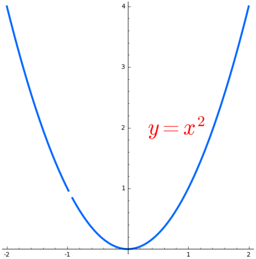
2. Геометрия плоских кривых

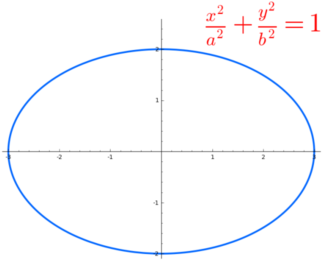
2.1. Определения и способы задания кривых.

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некий отрезок или интервал.

Определение

Кривая-график — $\gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in I,\ f \in C^\infty(I)\}$.





Определение

Неявно заданная кривая —

$$\gamma = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0,\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \neq 0, \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\}.$$

Определение

Регулярная кривая, заданная **параметрически** —
$\gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I,\ x(t), y(t) \in C^\infty(I),\ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0\}$.

Предложение

Все три выше указанных способа задания кривых локально эквивалентны

Доказательство.

- $(1) \Rightarrow (2)$: $F(x, y) = y - f(x)$;
- $(2) \Rightarrow (1)$: по теореме о неявной функции $\forall y_0\ \exists\ \varepsilon$-окрестность точки y_0, в которой $y = f(x)$;
- $(1) \Rightarrow (3)$: $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$;
- $(3) \Rightarrow (1)$: м.сч. $x'(t) \neq 0$. По теореме об обратной функции существует гладкая $t = t(x)$. Тогда $y = y(t(x))$.

■

Определение

Гладкая кривая на $\mathbb{R}^2$ — гладкое отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, т.е. вектор-функция $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in C^\infty([a,b] \times [a,b])$.
Вектор **скорости** — $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$.
Кривая **регулярная** — $\gamma'(t) \neq 0$.

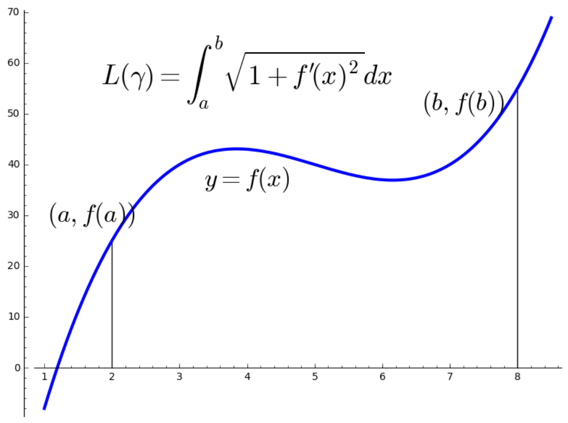
2.2. Длина дуги кривой. Натуральный параметр.

Определение

Длина кривой γ —

$$L(\gamma) := L(\gamma)[a,b] := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Пример



$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$
$(b, f(b))$
$y = f(x)$
$(a, f(a))$
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Предложение

Длина кривой не меняется при монотонной замене параметра.

Доказательство. Если $t = t(\tau)$, то $\gamma_1 := \gamma \circ t$ и

$$L(\gamma_1) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma_1}{d\tau} \right\| \, d\tau = \int_{t(a)}^{t(b)} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{d\tau} \right| \cdot \frac{d\tau}{dt} \, dt = L(\gamma).$$

■

Определение

Натуральный параметр s – такой параметр, что $s - a = L(\gamma)[a, s]$.
Тогда $\gamma(s)$ — **натуральная параметризация**.

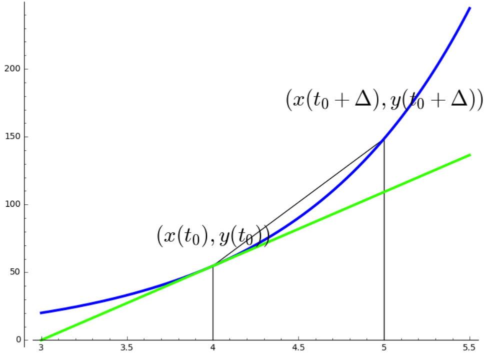
Производная по натуральному параметру обозначается точкой:
$\dot{\gamma} = d\gamma/ds$. Ясно, что $|\dot{\gamma}| = 1$.
Натуральную параметризацию можно найти:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \, dt,$$

2.3. Касательная и нормаль.

Определение

Касательная к кривой γ в точке t_0 — предельное положение секущей через точки t_0 и $t_0 + \Delta$ при $\Delta \to 0$.



Предложение

Направляющим вектором касательной к кривой γ в точке t_0 является ее вектор скорости $\gamma'(t_0)$, а уравнение касательной имеет вид

$$\ell(\tau) = \gamma'(t_0)\tau + \gamma(t_0),$$

где τ — параметр на ней.

Доказательство.

- Единичный вектор секущей: $\vec{s}\,(\Delta) = \frac{\gamma(t_0+\Delta)-\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0+\Delta)-\gamma(t_0)|}\,\mathrm{sgn}\,(\Delta)$.
- $\lim_{\Delta\to 0} \vec{s}\,(\Delta) = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} \Rightarrow \gamma'(t_0)$ — направляющий вектор касательной

∎

Определение

Нормаль к кривой в точке t_0 — прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной.

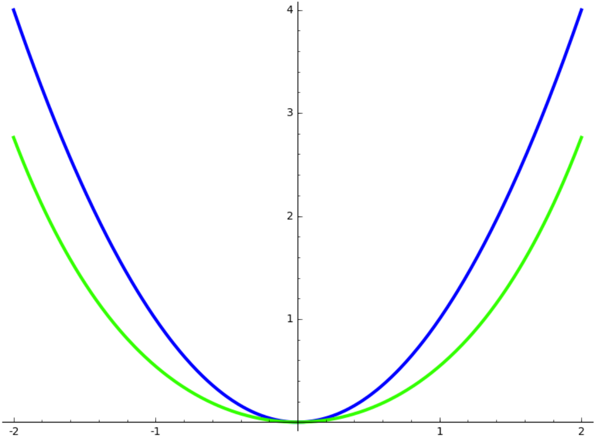
Направляющий вектор нормали равен $(-y'(t_0), x'(t_0))$

Уравнение нормали: $\dfrac{x - x(t_0)}{y'(t_0)} + \dfrac{y - y(t_0)}{x'(t_0)} = 0.$

2.4. Кривизна. Формулы Френе

Определение

Две гладкие регулярные кривые **касаются в точке** P, если они обе проходят через эту точку и имеют в ней общую касательную.



Определение

Гладкие регулярные кривые $r_1(s)$ и $r_2(s)$ имеют в точке 0 **касание порядка** k, если

$$r_1(0) = r_2(0), \quad \dot{r}_1(0) = \dot{r}_2(0), \quad \ldots, \qquad r_1^{(k)}(0) = r_2^{(k)}(0).$$

Лемма о перпендикулярности

Пусть $a\colon t \mapsto a(t) \in \mathbb{R}^n$ — гладкая вектор-функция, причем $|a(t)| \equiv const$. Тогда $a'(t) \perp a(t)$.

Доказательство. Продифференцируем $(a(t), a(t)) = const^2$ и получаем $2(a(t), a'(t)) = 0$. ■

Теорема (о соприкасающейся окружности)

Пусть $\gamma(s)$ – рег. кривая и $\ddot{\gamma}(s_0) \neq 0$. Тогда $\exists!$ окружность, имеющая в точке s_0 касание второго порядка с γ, причем
(1) ее центр лежит на нормали к кривой в направлении $\ddot{\gamma}(s_0)$,
(2) ее радиус равен $|\ddot{\gamma}(s_0)|^{-1}$.

Доказательство. Натуральная параметризация окружности

$$r(s) = \left(x_0 + R\cos\frac{s}{R}, y_0 + R\sin\frac{s}{R}\right).$$

Тогда

$$\ddot{r}(s) = -\frac{1}{R}\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right), \quad |\ddot{r}| = R^{-1}.$$

По лемме о перпендикулярности $\dot{r}(s) \perp \ddot{r}(s)$.
Касание 2-го порядка $\Leftrightarrow$ (1) и (2) ■

Определение

Окружность, имеющая с кривой касание 2-го порядка, называется **соприкасающейся**.
Ее радиус R – **радиус кривизны**.
Величина $k(s_0) = R^{-1} = |\ddot{\gamma}(s_0)|$ — **кривизна** кривой в точке s_0.

Пусть $\ddot{\gamma}(s) \neq 0$. Изучим кривую в точках ненулевой кривизны.

Определение

Вектор главной нормали — $n(s) = \dfrac{\ddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}(s)|} = \dfrac{\ddot{\gamma}(s)}{k(s)}$.

Пусть $v(s) = \dot{\gamma}(s)$.

Теорема (формулы Френе)

Для производных $(v(s), n(s))$ в точках ненулевой кривизны имеем

$$\dot{v}(s) = k(s)n(s), \quad \dot{n}(s) = -k(s)v(s).$$

Доказательство.

- Векторы скорости $v(s)$ и главной нормали $n(s)$ образуют ортонормированный репер:

$$\dot{\gamma}(s) \perp \ddot{\gamma}(s) = \dot{v}(s) = k(s)n(s).$$

- $n(s) \perp \dot{n}(s) \Rightarrow \dot{n}(s) = c(s) \cdot v(s)$.
- Продифференцируем $(v(s), n(s)) = 0$:

$$0 = (\dot{v}(s), n(s)) + (v(s), \dot{n}(s)) = c(s) + k(s).$$

- Тогда $\dot{n}(s) = -k(s)v(s)$

■

Список литературы

[1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин — Лекции по классической дифференциальной геометрии, 2009, Москва, Логос.
Лекция 1, стр. 5 – 14

[2] А. И. Шафаревич — Курс лекций по классической дифференциальной геометрии, 2007, Москва, МГУ, Механико-математический факультет. *Лекция 1, стр. 3 – 10*