Problem Set 1

① a) Пусть $S = T^2 \setminus \{pt\}$. Найти $\chi(S)$. Доказать, что $\pi_1(S) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

b) Пусть $S_{g,n}$ – поверхность рода g с n проколами, $g \geq 1, n \geq 1$.

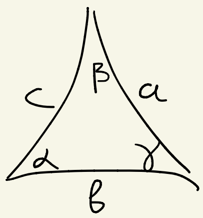
Найти $\chi(S_{g,n})$.

② Найти кол-во связных компонент, центр и размерность групп Ли $O_{p,q}(\mathbb{R})$ и $SO_{pq}(\mathbb{R})$. Дайте описание алгебры Ли $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(SO_{pq}(\mathbb{R})) = T_{Id}SO_{pq}(\mathbb{R})$.

③ Используя форму Киллинга и присоединенное представление, построить явный изоморфизм групп $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ и $SO_{2,1}(\mathbb{R})$.

④ Докажите, что все идеальные треугольники в H^2 изометричны.

⑤ Рассм $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) \subset H^2$. Докажите I и II теор. косинусов:



$$\text{I}: \quad \cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\cdot\sinh(b)\cdot\cos\gamma$$

$$\text{II} = \text{I}^*: \quad \cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cosh(a)$$

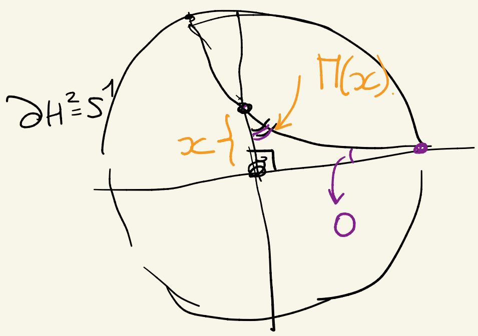
Выведите отсюда, что $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \geq 0 : \alpha + \beta + \gamma < \pi \quad \exists!\, \Delta(\alpha, \beta, \gamma) \subset H^2$.

⑥ Дан $\Delta\left(\frac{\pi}{2}, \Pi(x), 0\right)$:

Докажите, что

$\Pi(x) = 2\operatorname{arctg}(e^{x})$.

угол параллельности



$H^2 \simeq B^2$ (Пуанкаре)

⑦ Пусть $\gamma \in \mathrm{Isom}(H^2) = PSL_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle\tau\rangle$ или $\mathrm{Isom}(H^3) = PSL_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle\tau\rangle$.

Докажите, что
$$\begin{cases} \gamma \text{ – эллипт} \\ \gamma \text{ – парабол} \\ \gamma \text{ – локсодром.} \end{cases} \iff \begin{cases} tr(\gamma) \in (-2, 2) \\ tr(\gamma) = \pm 2 \\ tr(\gamma) = [-2, 2]^c \end{cases}$$

дополнение до $[-2,2]$, т.е. для H^2: $\mathbb{R} \setminus [-2,2]$, H^3: $\mathbb{C} \setminus [-2,2]$

⑧ Рассмотрим геодез. $\gamma(t) \subset H^2$ и $p \in \gamma(t)$.

Пусть $\tau_\gamma(s)$ – сдвиг вдоль $\gamma(t)$ на парам s.

Найти $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\tau_\gamma^n(s) \cdot p\right)$.