Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович

(Сколтех & МФТИ)

Лекция 9

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была)

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли. (было)

V Гиперболические поверхности, многообразия, орбифолды. Группы отражений. Решетки в $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. (было)

VI Основные концепции геометрической теории групп: QI = квазиизометрии; граф Кэли; лемма Шварца–Милнора; δ-гиперболичность; группы, гиперболические по Громову.

VII Деформации ($\mathbb{H}^2$) и жесткость ($\mathbb{H}^{\geq 3}$): pants decomposition (штаны); mapping class groups; пр-ва модулей; пр-во Тайхмюллера; группа Торелли I_g и ядро Джонсона K_g; твисты Дэна (Dehn twists); curve graph и гиперб-по Громову; формулировки теорем жесткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

Комментарии к пред. лекциям:

- $\Gamma < G$ — н/п реш гр. Ли. Если G некомпактна, то $\Gamma \supset F_n$, $n \geq 2$, и, след., не разр.
- $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ с каспом. Сечения каспа = $(n-1)$-мерный тор T^{n-1}. Таким обр., $\Gamma \supset \mathbb{Z}^{n-1} \Rightarrow$ НЕ гипрб. по Громову при $n \geq 3$.

VIII Теоремы жесткости Мостова, Прасада и Маргулиса. Доказательство теоремы жесткости Мостова для компактных гиперболических мног-ий.

① Теоремы жёсткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

Теор. (Мостов '1968)

Пусть $M_1 = H^n/\Gamma_1$ и $M_2 = H^n/\Gamma_2$ — компактные гиперболические многообразия.

Тогда при $n \geq 3$

$$\underset{\pi_1(M_1)}{\overset{}{\Gamma_1}} \cong \underset{\pi_1(M_2)}{\Gamma_2} \iff M_1 \overset{homeo}{\approx} M_2 \iff M_1 \overset{isom}{\cong} M_2 \iff \exists g \in PO_{n,1}(\mathbb{R}) = Isom(H^n),$$

т.что $\Gamma_2 = g\Gamma_1 g^{-1}$.

$$\left(\iff M_1 \overset{homotopy}{\simeq} M_2\right)$$

Теор (Прасад '1973)

— " — M_1 и M_2 — некомп. кон объема.

Теор (Margulis Superrigidity Theorem '19)

Замечание с прошлой лекции: Надо подправить.
1) $G \not\approx SL_2(\mathbb{R})\times K$
2) Mostow vs. Margulis

Пусть $G_1 \underset{\text{изогения}}{\not\approx} SO_{n,1}(\mathbb{R})\times K$ или $SU_{n,1}(\mathbb{R})\times K$. $(\Leftarrow rk_{\mathbb{R}} G_1 \geq 2)$.

Пусть G_1, G_2 - связные п/п гр. Ли без центра и компактных множителей.

Пусть $\Gamma < G_1$ непривод. решетка и $\varphi : \Gamma \to G_2$ - гомоморфизм, т.что $\underset{\text{замыкание по Зарисскому}}{Zd(\Gamma)} = G_2$. Тогда φ продолж. до непр. гомоморфизма $\hat{\varphi} : G_1 \to G_2$.

(Грубо говоря, $\Gamma_j < G_j$ реш, $\varphi : \Gamma_1 \xrightarrow[\text{гом}]{} \Gamma_2 \Rightarrow \exists \hat{\varphi} : G_1 \to G_2$)

Опр. Решетка $\Gamma < G$ неприв., если ΓN всюду плотна в G° для всякой некомп., замкн. норм. подгр $N \triangleleft G$.

Теор (Borel's Density Theorem).

[вещ. алгебр. группе $G \subset GL_N(\mathbb{R})$].

Пусть $\Gamma < G$ — решетка в п/п гр. Ли без комп. множ. Тогда $Zcl(\Gamma) = G$

т.е. если $p(x_{11}, \ldots, x_{nn}) \in \mathbb{R}[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$ (многочлены на $Mat_N(\mathbb{R})$)

и $p(\Gamma) = 0$, то и $p(G) = 0$.

Теор. (Strong Mostow Rigidity)

Пусть G_1, G_2 — связные п/п гр. Ли без центра и комп. множ.,

$G_1 \not\cong PSL_2(\mathbb{R})$, $\Gamma_j < G_j$ — неприв. решетки. Тогда

всякий изоморфизм $\varphi: \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2$ продолж. до непр. изом. $\hat{\varphi}: G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$.

2 План доказательства теор. жесткости Мостова

Теор. (Мостов '1968)

Пусть $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ — компактные гиперболические многообразия.

Тогда при $n \geq 3$

$$\underset{(A)}{\Gamma_1 \cong \Gamma_2} \iff \underset{(B)}{M_1 \overset{homeo}{\approx} M_2} \iff \underset{(C)}{M_1 \overset{isom}{\cong} M_2} \iff \underset{(D)}{\exists g \in PO_{n,1}(\mathbb{R}) = Isom(\mathbb{H}^n)},$$

т.что $\Gamma_2 = g\Gamma_1 g^{-1}$.

$\Gamma_1 = \pi_1(M_1)$, $\Gamma_2 = \pi_1(M_2)$

$\Big(\overset{(E)}{\iff} M_1 \overset{homotopy}{\simeq} M_2 \Big)$

Очевидно: $D \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow E \Rightarrow A$

Crazy (?) Idea: $A \Rightarrow E \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$.

easy!

4 КИТА: топология, геометрия, анализ, динамика = эргодическая теория.

Схема

(A) $\varphi: \Gamma_1 \xrightarrow{\cong} \Gamma_2 \overset{1}{\longmapsto} M_1 \simeq M_2$ (f — smooth homotopy) (E) $\overset{2}{\longmapsto} \tilde{f}: \mathbb{H}^n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^n$ — smooth homotopy, — pseudo-isometry (B) $\overset{3}{\longmapsto}$! $\partial\tilde{f}: \partial\mathbb{H}^n \xrightarrow{\approx} \partial\mathbb{H}^n$ homeo boundary map

$\overset{4}{\longmapsto} \partial\tilde{f}: \partial\mathbb{H}^n \to \partial\mathbb{H}^n$ — K-quasi-conf ($\partial\mathbb{H}^n = S^{n-1}$) $\longmapsto \partial\tilde{f}$ дифф. п.в. $\longmapsto d(\partial\tilde{f})$ — K-quasi conf.

$n=2$ не работ.: $d(\partial\tilde{f})$ огран.

$\overset{5}{\longmapsto} \Gamma \curvearrowright S^{n-1}$ эргодично и либо Howe-Moore thrm, либо теор. Хопфа-Аносова про эрг. геод. потоков на гиперб. мн-ях $\longmapsto K \equiv 1$ п.в. $\overset{6}{\longmapsto} d(\partial\tilde{f})$ и $\partial\tilde{f} \in Conf \Rightarrow \tilde{f} \in Isom(\mathbb{H}^n)$ (C)

① $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ – компл. гип. мн-я. Пусть $\Gamma_1 \overset{\varphi}{\cong} \Gamma_2$. Тогда $\exists$ (гладкая) гомотопия $f: M_1 \to M_2$, которая поднимается до φ-эквивариантной псевдоизометрии $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$.

$\boxed{A \Rightarrow E}$

φ-эквив → Hint

φ-экв.: $\tilde{f}(\gamma x) = \varphi(\gamma) \cdot \tilde{f}(x)$.
(т.е. $\tilde{f} \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}$)

$\varphi: \Gamma_1 \overset{\sim}{\to} \Gamma_2$ – изоморфизм.

Лемма о поднятии путей + $x_0 \in \mathbb{H}^n$, D – фунд. для Γ_1, $x \in \gamma D$. Тогда $\tilde{f}(x) := \varphi(\gamma) x_0$

Имеем диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^n \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, "p_1"] & \mathbb{H}^n \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[d, "p_2"] \\
M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1 \arrow[r, bend left, "f"] & \mathbb{H}^n/\Gamma_2 = M_2 \arrow[l, bend left, "g"]
\end{tikzcd}$$

Действ., гомотопия есть в силу асферичности $\mathbb{H}^n/\Gamma$ (см. лекцию 1). Гладкость есть в силу Теор. Уитни о сильной аппроксимации (см. лекцию 2). Указание про поднятие до φ-экв. гомотопии дано.

② Док-во псевдо-изометричности $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$

Опр. Псевдо-изометрия: $f: X \to Y$, если $\exists\, c > 0$, $\varepsilon > 0$, т.ч.
$$\frac{1}{c} \rho_X(a,b) - \varepsilon \le \rho_Y(f(a), f(b)) \le c\, \rho_X(a,b).$$

Опр. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пр-ва. Тогда отобр. $f: X \to Y$ назыв. (C_1, C_2)-квазиизометр. вложением, если

$$\frac{1}{C_1} \rho_X(a,b) - C_2 \le \rho_Y(f(a), f(b)) \le C_1 \rho_X(a,b) + C_2 \quad \forall a, b \in X$$

Опр. $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ – квазиизометрия, если $f = (C_1, C_2)$-QI-вложение и $\forall y \in Y\ \exists x \in X$: $\rho_Y(f(x), y) \le C_2$. Обозн: $X \overset{QI}{\sim} Y$ или $(X, \rho_X) \overset{QI}{\sim} (Y, \rho_Y)$.
($A \overset{QI}{\sim} B$ и $B \overset{QI}{\sim} C \Rightarrow A \overset{QI}{\sim} C$)

Лемма. Если $f: X \to Y$ – QI, то существует "QI-обратное" $g: Y \to X$, т.что $g = (C_1, C_2)$-QI и $\forall x \in X$ и $y \in Y$ верно
$$\rho_X(g \circ f(x), \underset{x}{\underset{\shortparallel}{Id_X(x)}}) \le C_2 \text{ и } \rho_Y(f \circ g(y), y) \le C_2.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"]
\end{tikzcd}$$

Лемма 1) $\mathrm{Isom}(H^n) = \mathrm{Conf}(\partial H^n) := \mathrm{Conf}(S^{n-1})$.

2) $QI(H^n) = Q\mathrm{Conf}(S^{n-1})$.

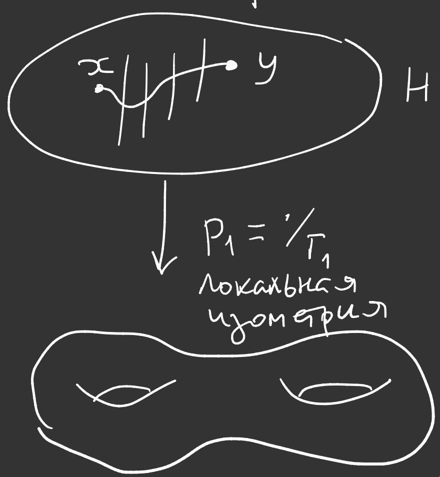
Опр а) Пусть (X,ρ) – метр. пр-во. Геодезическая в X = $\gamma : [a,b] \xhookrightarrow[\text{влож.}]{\text{изом!}} X$

б) Квазигеодезическая = $\tilde\gamma : [a,b] \hookrightarrow X$ – QI-вложение.

Наконец, тот факт, что $\exists$ φ-экв квази-изом $f : M_1 \to M_2$ и $\tilde f : H^n \to H^n$ вытекает из Л. Шварца-Милнора $\left(\Gamma_1 \overset{QI}{\sim} H^n \overset{QI}{\sim} \Gamma_2\right)$.

Псевдо-изометричность можно вывести из C-липшицевости, или напрямую.

1) отобр. $x \longmapsto \dfrac{\rho(f(x), f(y))}{\rho(x,y)}$ – непрер., причем в силу компактности M_1 оно $\left[C_x := \max\limits_{y\in B(x,1)} \dfrac{\rho(f(x),f(y))}{\rho(x,y)}\right]$ будет C-Lipschitz для некот. $C>0$. $C = \sup\limits_x C_x$



$\Rightarrow \tilde f$ – C-Lipschitz

Аналогично, g и $\tilde g$ оба будут C-Lipschitz.

Поэтому имеем:

$$\rho(\tilde f(x), \tilde f(y)) \boxed{\leq} C \rho(x,y); \quad \rho(\tilde g(x), \tilde g(y)) \boxed{\leq} C \rho(x,y) \quad \forall x,y \in H^n.$$

2) Итак, $\tilde g \circ \tilde f \simeq \mathrm{Id}_{H^n}$ (т.к. $g\circ f \simeq \mathrm{Id}_{M_1 = H^n/\Gamma_1}$), причем $\tilde g \circ \tilde f(\gamma x) = \gamma(\tilde g(\tilde f(x$

Напомним, что $C = \sup\limits_x C_x$, где $C_x = \max\limits_{y \in B(x,1)} \dfrac{\rho(f(y), f(x))}{\rho(y,x)}$. Тогда

$$\rho(x,y) - 2K \leq \rho(\underbrace{\tilde g\circ\tilde f(x)}_{=\tilde x}, \underbrace{\tilde g\circ \tilde f(y)}_{=\tilde y}) \leq C\rho(\tilde f(x), \tilde f(y)), \text{ где } K = \mathrm{diam}(\mathcal{D})$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(\tilde f(x), \tilde f(y)) \boxed{\geq} \frac{1}{C}\rho(x,y) - \frac{2K}{C}$$

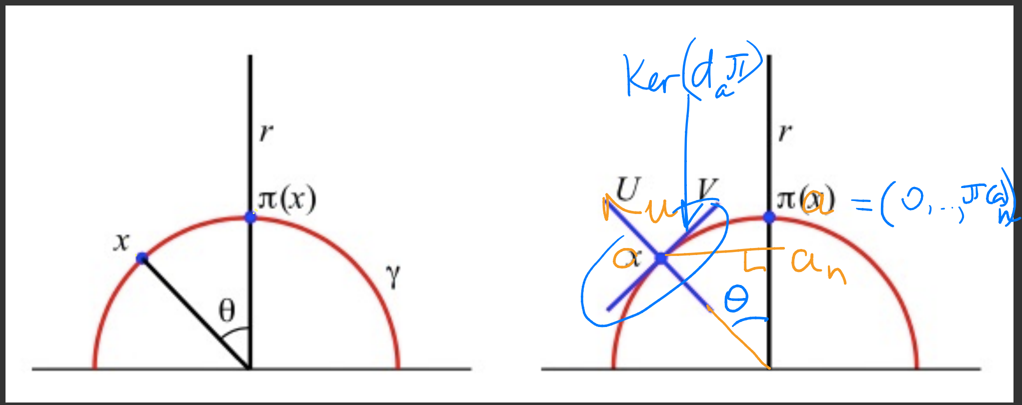
$\blacksquare$

③ Продолжение псевдо-изометрии до гомеом. $\overline{H^n} = H^n \cup \partial H^n$

(Following Martelli "Intro to Geom Topol")

Теор. Псевдо-изом $F: H^n \to H^n$ продолжается до $F: \overline{H^n} \xrightarrow{\approx} \overline{H^n}$

Лемма 1



Пусть $\pi: H^n \to r$ — проекция на прямую.

Тогда

(1) $\cosh \rho(x, \pi(x)) = \dfrac{1}{\cos\theta}$

(2) $\max\limits_{\substack{\|v\|=1 \\ v\in T_aH^n}} \|d_a\pi(v)\| = \max\limits_{v\in T_aH^n} \dfrac{\|d_a\pi(v)\|}{\|v\|} = \dfrac{1}{\cosh\rho(a, r)}$

(maximal dilatation of $f: M \to N$ at $a \in M$: $\max\limits_{v\in T_aM} \dfrac{\|d_af(v)\|}{\|v\|}$)

Док-во:

(1) М.сч., что мы в $H^2 \subset \mathbb{C}$, $\pi(x) = i$, $r(t) = ie^t$.

$\gamma(t) = \dfrac{ie^t+1}{-ie^t+1}$, т.к. $\varphi(r) = \gamma$, где $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$.

Пусть $s = \rho(x, \pi(x))$. Тогда $x = \dfrac{ie^s+1}{-ie^s+1}$ $\left|\ \text{при } s=0,\ x=i\ \right|$

и $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \mathrm{Im}(x) = \mathrm{Im}\left[\dfrac{(1+ie^s)^2}{e^{2s}+1}\right] = \dfrac{2e^s}{e^{2s}+1} = \dfrac{1}{\cosh(s)}$

(2) $\pi: H^n \to r$, тогда $d_a\pi: T_aH^n \to T_{\pi(a)}r$

Мы в модели $H^n_+ = \{x_n > 0\}$. Тогда $T_aH^n = U \oplus V = U \oplus \mathrm{Ker}(d_a\pi)$, где $\dim V = n-1$, $U = \langle u \rangle$

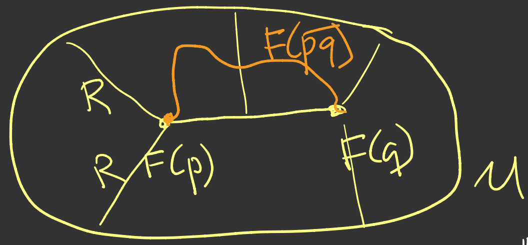
Имеем для $u \in U$

$$\frac{\|d_a\pi(u)\|}{\|u\|} = \frac{a_n}{(\pi(a))_n} = \cos\theta \overset{(1)}{=} \frac{1}{\cosh\rho(a, \pi(a))}$$

Лемма 2 Пусть $F: H^n \to H^n$ — псевдо-изом. Тогда $\exists R>0$:

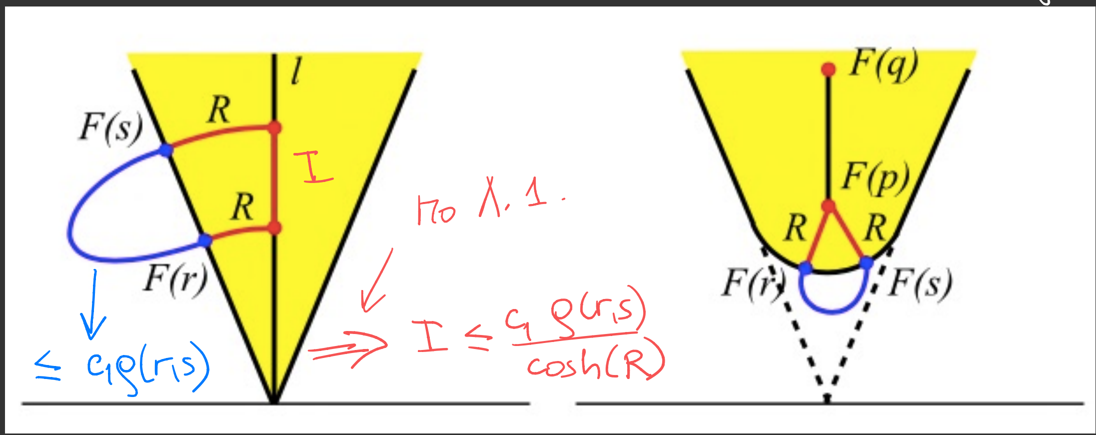
$$F(\overline{pq}) \subset N_R(\overline{F(p)\,F(q)})$$

для всех $p,q \in H^n$.



Док-во. $\frac{1}{c_1}\rho(x,y) - c_2 \le \rho(F(x),F(y)) \le c_1\rho(x,y)$. В ч., F — c_1-Липш.

Возьмем R: $\cosh(R) > 2c_1^2$. Пусть $\overline{rs} \subset \overline{pq}$ — макс. кусок, на котором $F(\overline{rs})$ вылазит за пределы U.



Тогда

$$\frac{1}{c_1}\rho(r,s) - c_2 \le \rho(F(r),F(s)) \le c_1\rho(r,s).$$

Правую часть можно улучшить (лемма 1)

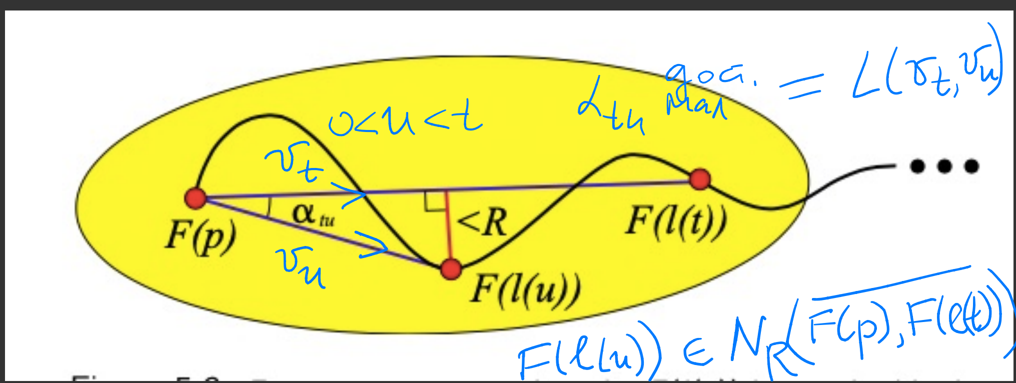
$$\rho(F(r),F(s)) \le \frac{c_1}{\cosh(R)}\rho(r,s) + 2R.$$ Отсюда

$$\left(\frac{1}{c_1} - \frac{c_1}{\cosh(R)}\right)\rho(r,s) \le 2R + c_2,$$ причем $\cosh(R) > 2c_1^2$, т.к.

$\rho(r,s) < M(c_1,c_2)$. Берем $R' := R + c_1 M$. ∎

Лемма 3

$F: H^n \to H^n$ - псевдо изом. Тогда $\exists R>0$: $\forall p \in H^n$ и всякого луча ℓ из p $\exists!$ луч ℓ' из $F(p)$, т.ч.



$$F(\ell) \subset N_R(\ell').$$

Док-во: Пусть $\ell(t)$ — натур. парам., где $\ell(0)=p$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(F(p), F(\ell(t))) = +\infty$, т.к. F — псевдо изом.

см. рис + Л2

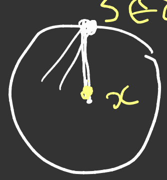
Пусть $v_t \in T_{F(p)}H^n$, где $\|v_t\| = 1$. Тогда $\{v_t\} \to v \in T_{F(p)}H^n$

Пусть ℓ' — луч с напр v. Тогда $F(\ell) \subset N_R(\ell')$. $\boxtimes$

Значит мы можем расширить $F: H^n \to H^n$ до

$F: \overline{H^n} \to \overline{H^n}$

Классы эквивалентности лучей = точки на ∂H^n



$F(s) = \lim\limits_{x\in \ell,\, x\to s} F(x)$.

$\ell\cap\partial H^n = s\cup s'$

Лемма 4 $F|_{\partial H^n}: \partial H^n \to \partial H^n$ корр. опр. и инъективно

Док-во Пусть ℓ_1, ℓ_2 — лучи т.ч. $\rho(\ell_1(t), \ell_2(t)) < M \quad \forall t$.

Пусть $F(\ell_1) = \ell_1'$, $F(\ell_2) = \ell_2'$

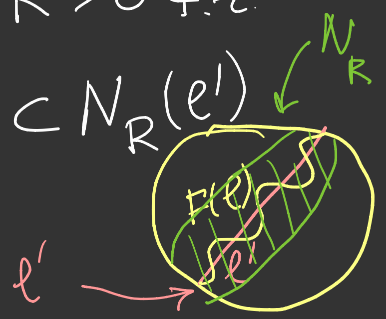
Если $\rho(\ell_1'(s), \ell_2'(s)) \to +\infty$, то $\rho(F(\ell_1(t)), F(\ell_2(t))) \to +\infty$ невозм. в силу C_1-Lip.

Если ℓ_1 и ℓ_2 расходятся, то и ℓ_1' и ℓ_2' расход.

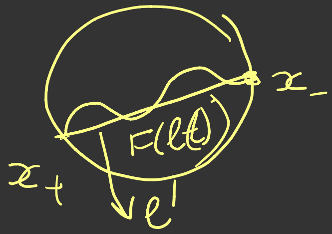
Лемма 5 (Morse-Mostow Lemma)

Пусть $F: H^n \to H^n$ — псевдо/квази-изом (C_1,C_2). Тогда $\exists R = const(C_1,C_2) > 0$ т.ч. $\forall$ геод. $\ell\subset H^n$ $\exists!$ геод. ℓ': квазигеод. $F(\ell) \subset N_R(\ell')$

(геодезическое выпрямление квази-геодезической)



Док-во:



$l(t): \mathbb{R} \to H^n$ – нат. пар. Можно разрезать l на 2 луча.

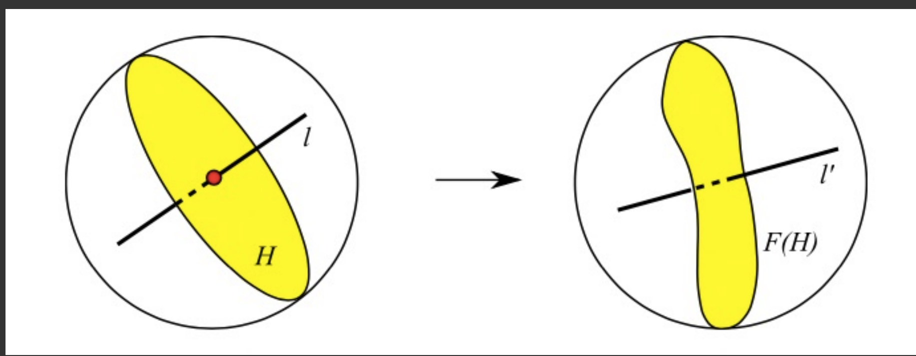
Тогда $\forall t>0$ имеем
$$F(l([-t,t])) \subset N_R\left(\overline{F(l(-t))\,F(l(t))}\right)$$ и

берем $t \to +\infty \Rightarrow F(l) \subset N_R(l')$.

Лемма 6 Пусть F – псевдо-изом. Тогда $\exists R>0$: $\forall l$ и гиперпл-ти $H \perp l$ образ $F(H)$ при проекции на $l' \sim_{\text{аппрокс}} F(l)$ попадает на дугу длины $< R$.

↓ геодезическая

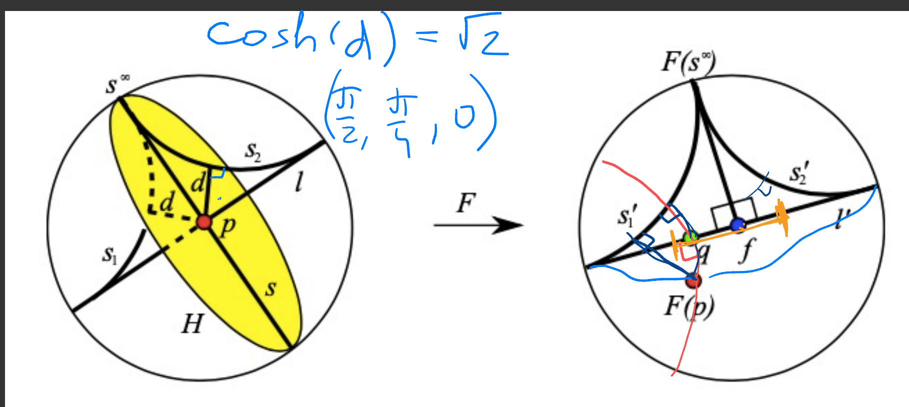
l' – геодезическое выпрямление $F(l)$



Док-во:

Рассм произв. прямую $s \subset H$. прох. через $p = l \cap H$

$F(s) \subset N_R(s')$, где $s' \neq l'$

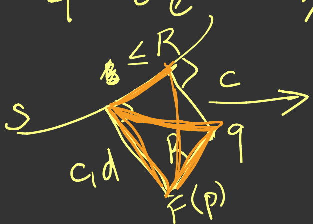


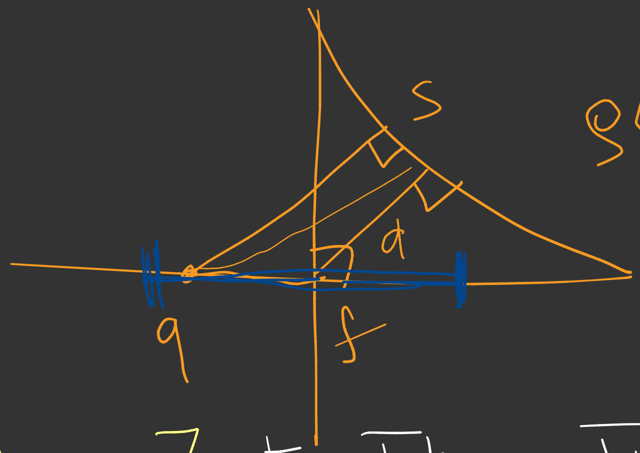
$q = \pi_{l'}(F(p)) \Rightarrow \rho(q, F(p)) \le R$

$\rho(F(p), s_j') \le C_1 \cdot d$

$\rho(q, s_j') \le (C_1 d + \cancel{2}R)$

$\Rightarrow \boxed{\rho(f,q) < C_1 d + \cancel{2}R}$





$$\rho(q,f) < \rho(q,s)+d$$
$$< \mathrm{const}(d,R)$$
$$\leq C(R).$$

<u>Лемма 7</u> $F: \overline{H}^n \to \overline{H}^n$ непр. и далее гомео.

<u>Док-во:</u> Пусть $x \in \partial H^n$ и $F(x) \in \partial H^n$. Пусть $l \subset H^n$ — луч, т.ч. $\partial_\infty l = x$. Тогда $\partial_\infty l' = F(x)$. Более того, $F(l)$ — R-close to l'

$\boxed{F(H(t)) \subset S}$.

$\Rightarrow F(H^+(t)) \subset S. \Rightarrow$ непр. в $x \in \partial H^n$.

Далее,

F непр, инъект., сюр на компакте $\overline{H}^n$

$\uparrow$ поднятие $\qquad\qquad \Downarrow$

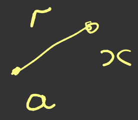
$M_1 \rightleftarrows M_2$, f — гомео.

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ гомеоморфизм.} \\ \text{причем } \partial F|_{\partial H^n} \text{ тоже гомеом.} \end{array}}$$

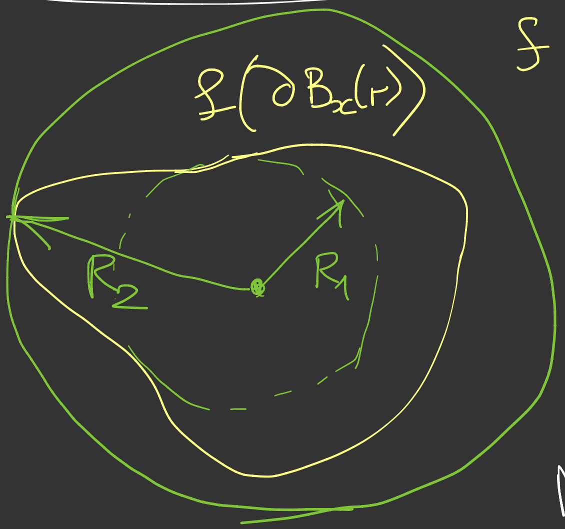
∎

④ Boundary map $\partial\tilde{f}$ is quasi-conformal:

Опр 3 $f: X \to Y$ явл. C-квази-конф., если

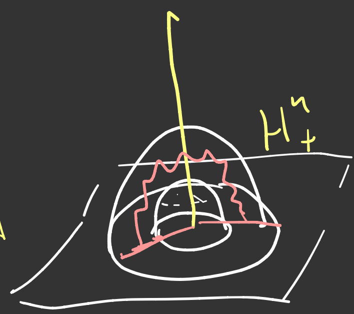


$$\forall x \in X \quad \lim_{r\to 0} \frac{\sup\limits_{a\in X:\, \rho_X(a,x)=r} \left(\rho_Y(f(a), f(x))\right)}{\inf\limits_{a\in X:\, \rho_X(a,x)=r} \left(\rho_Y(f(a), f(x))\right)} \le C$$



f -quasi-conf, если $\exists C>0$

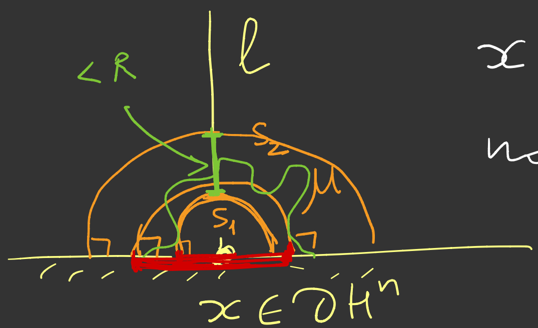
$$\lim_{r\to 0} \frac{R_2}{R_1} \le C.$$



Док-во ④:

Можем считать, что $\partial_\infty f$ фиксирует (up to isometry) $x \in \partial H^n$ и $l \ni x$, $l \in H^n$. Тогда по лемме 6 $\exists R>0$:

$$\boxed{\operatorname{diam} \operatorname{Proj}_l(\partial_\infty f(\mu)) < R}$$



Рассм сферы S_1 и S_2 рад. R_1 и R_2 соотв., образ.

Тогда $R \ge \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{x} = \log\left(R_2/R_1\right)$, т.е. $\partial_\infty f = e^R$-QC. $\square$

Теор. Пусть $n \ge 3$. Тогда quasi-conf homeo $F: S^{n-1} \to S^{n-1}$ явл. дифф. п.в. Более того, d_xF равн. огр., т.е. $\exists \lambda > 1$: $\forall$ п.в. $x \in S^{n-1}$ и $\forall v \in T_xS^{n-1}$

$$1/\lambda \le \frac{\|d_xF(v)\|}{\|v\|} \le \lambda$$

Замечание При $n=2$ не выполнено усл-е про d_xF.

А именно, $\exists$ гомеоморфизмы S^1: $d_xF \equiv 0$.

Теор. (без док-ва).

1) Пусть $F \in Homeo(S^{n-1}) \cap C(S^{n-1})$. Тогда

$F \in K\text{-}QConf(S^{n-1}) \Longleftrightarrow dF \in K\text{-}QConf(TS^{n-1})$.

2) $F \in QConf(S^{n-1})$ и $dF \in Conf(TS^{n-1}) \Rightarrow F \in Conf(S^{n-1})$.