Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 8

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была)

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли. (было)

V Гиперболические поверхности, многообразия, орбифолды. Группы отражений. Решетки в $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ (было)

VI Основные концепции геометрической теории групп: QI = квазиизометрии; граф Кэли; лемма Шварца–Милнора; δ-гиперболичность; группы, гиперболические по Громову.

① QI: квазиизометрии; псевдоизометрии; метрич. пр-ва

Опр. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пр-ва. Тогда отобр. $f: X \to Y$ назыв. (C_1, C_2)-квазиизометр. вложением, если

$$\frac{1}{C_1}\rho_X(a,b) - C_2 \leq \rho_Y(f(a), f(b)) \leq C_1 \rho_X(a,b) + C_2 \quad \forall a, b \in X.$$

Опр. $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ – квазиизометрия, если $f = (C_1, C_2)$-QI-вложение и $\forall y \in Y \ \exists x \in X: \ \rho_Y(f(x), y) \leq C_2$. Обозн: $X \overset{QI}{\sim} Y$ или $(X, \rho_X) \overset{QI}{\sim} (Y, \rho_Y)$.

$(A \overset{QI}{\sim} B$ и $B \overset{QI}{\sim} C \Rightarrow A \overset{QI}{\sim} C)$

Упр. Доказать, что если $f: X \to Y$ — QI, то существует "QI-обратное" $g: Y \to X$, т.что $g = (c_1, c_2)$-QI и $\forall x \in X$ и $y \in Y$ верно

$$\rho_X(g \circ f(x), \underset{\overset{\shortparallel}{x}}{Id_X(x)}) \leq C_2 \text{ и } \rho_Y(f \circ g(y), y) \leq C_2.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Опр. $QI(X)$ — группа квазиизометрий $\{f: X \to X\}$.

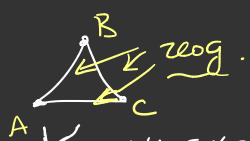
Опр. а) Пусть (X, ρ) — метр. пр-во. Геодезическая в X = $\gamma: [a,b] \xrightarrow[\text{влож.}]{\text{изом!}} X$

б) Квазигеодезическая = $\varphi: [a,b] \hookrightarrow X$ — QI-вложение.

в) X — собств., если все замкн шары компактны

г) X — геодезическое, если $\forall x, y \in X$ $\exists$ геод: $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

д) X — length metric space, если $\forall x, y$ $\rho(x,y) = \inf\limits_{\substack{\gamma: [a,b] \to X \\ \gamma(a) = x \\ \gamma(b) = y}} L(\gamma)[x,y]$

е) геод. треугольник ABC = 

ё) X — полно, если посл-ть Коши сходится.

Теор. X — length metric space
полное, лок.-комп $\iff$ X — геодезичное и собственное

② Группы, word-metric, граф Кэли, фундаментальная лемма геометрической теории групп (лемма Шварца – Милнора).

Опр. Пусть G — кон. порожд. группа с порожд. мн-вом S.

Тогда $Cay(G; S)$ — граф Кэли, вершины которого $V = G$, а ребра соединяют пары (g, gs), где $s \in S$. (М.сч., что $s^{-1} \in S$ $\forall s \in S$).

Word-metric on G определяется через длины минимальных слов, т.е. пусть $g = s_1 \dots s_k$, тогда $\ell(g) = k$ и $\rho_G(g,h) = \ell(g^{-1}h)$.

Ясно, что $\rho_G(g,h) = \rho_{Cay}(g,h)$. $(\rho_{G,S} = \rho_{Cay(G;S)})$

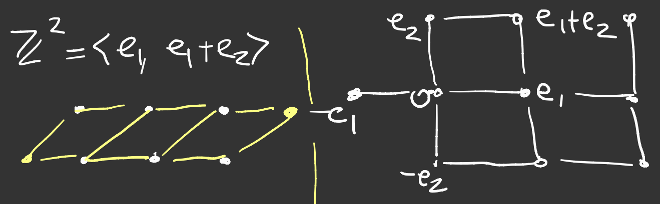
Предл. Пусть $S_1, S_2 \subset G$ — два разных порожд мн-ва. Тогда

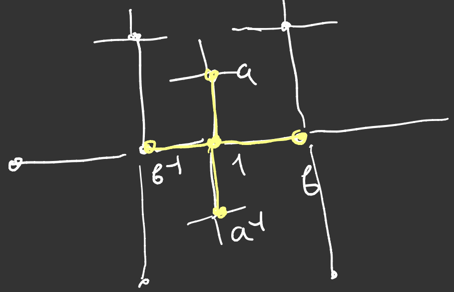
$$(G, \rho_{G,S_1}) \overset{QI}{\sim} (G, \rho_{G,S_2}).$$

Примеры 1) Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$. Тогда $Cay(\Gamma; \{e_1, e_2\}) \cong \mathbb{Z}^2$

2). Пусть $\Gamma = F_2 = \langle a, b \rangle$.

Тогда $Cay(F_2, S) \cong$ дерево T_4





3) Пусть $\Gamma < Isom(H^2)$ — группа отражений в стенках $\Delta(\pi/k, \pi/l, \pi/m) \subset H^2$. Пусть

Π — замощение $= \bigcup_{\gamma} \gamma(\Delta)$.

Имеем: $\Gamma = \langle \underbrace{a, b, c}_{S} \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1,\ (ab)^k = (bc)^l = (ac)^m = 1 \rangle$

Тогда $\underline{Cay(\Gamma, S') \cong \Pi^*}$.

Теор. (Шварц 1955, Милнор 1968, фундаментальная лемма геометр. теории групп)

Пусть $\Gamma \curvearrowright X$ — собств. геод. метр. пр-во.
вполне разр.; кокомпактно } — геометрич. действие. Тогда

(1) Γ — кон. порожд. и (2) $(\Gamma, \rho_{\Gamma,S}) \overset{QI}{\sim} (X, \rho)$ через отобр. $\gamma \mapsto \gamma p$ для фикс. $p \in X$.

Следствия 1) В усл. теор. $(X, \rho) \overset{QI}{\sim} (Cay(\Gamma; S), \rho_{Cay})$.

2) Если G/Γ — компакт (Γ — решетка в G), то $\Gamma \hookrightarrow G$ — QI, т.е. $\Gamma \overset{QI}{\sim} G$

3) $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 < G$ кокомп. решетки имеем $\Gamma_1 \overset{QI}{\sim} \Gamma_2$.

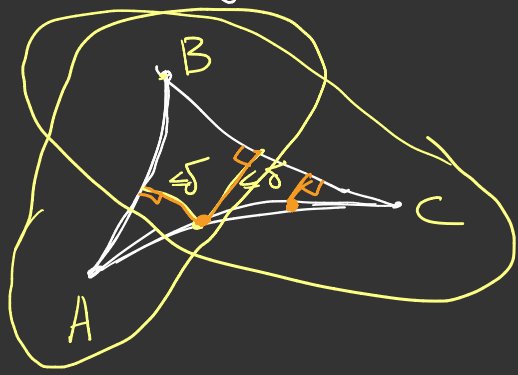
Замеч. Для X/Γ некомп. имеется много контр-примеров к лемме Шварца-Милнора.

(3) δ-гиперболичность и гиперболичность по Громову

Опр. Метрич. пр-во X явл. δ-гиперболичным (или гиперб. по Громову), если $\exists\, \delta \geq 0$ т.ч. всякий геод. тр-к в X явл. δ-тонким, т.е.

$$AC \subset N_\delta(AB) \cup N_\delta(BC) \text{ и}$$

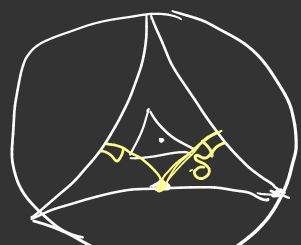
— " — .



Группа Γ назыв гиперб. по Громову, если $(\Gamma, \rho_{\Gamma,S})$ или $(Cay(\Gamma;S), \rho_{Cay})$ — δ-гиперб.

Примеры 1) H^2 — δ-гиперболично, где $\delta = \operatorname{arccosh}(\sqrt{2})$.
(т.е. и H^n)

Действ., всякий Δ можно вложить в ид. тр-к $\Delta_{ид}$:



Упр. Посчитайте и докажите.

2) E^2 — не δ-гиперб. (гомотетии). 3) F_n — 0-гиперб.

Теор. Пусть $X_1 \overset{QI}{\sim} X_2$. Если X_1 гиперб. по Громову, то и X_2 тоже.

Теор. Пусть M — компактное рим. мн-е секц. крив. $K<0$. Тогда $\widetilde{M}$ (унив. накр) и $\pi_1(M)$ гиперб. по Громову.

Следствия 1) Равномерные решетки $\Gamma < PO_{n,1}(\mathbb{R})$ гиперб. по Громову.

2) Решётки в $PSL_2(\mathbb{R})$ гиперб. по Громову.

3) $\mathbb{Z}^2$ не гиперб. (т.к. $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright E^2$ вп. разр. и кокомпактно)

Теор. Группа Γ не гиперб. по Громову в след. случаях

1) Если $\mathbb{Z}^2 < \Gamma$ 2) Если Γ не содерж $F_n, n \geq 2$, и не явл. вирт. цикл.

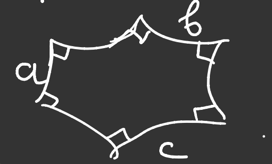
Теор. Пусть $\Gamma \underset{lattice}{<} G$ — п/п гр. Ли. Тогда Γ — гиперб. по Громову $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G = 1$ и либо G/Γ - компакт, либо G изогенна $SL_2(\mathbb{R}) \times K$ компакт.

non-uniform lattices in $PO_{n,1}$ $\Rightarrow$ relatively hyperb.

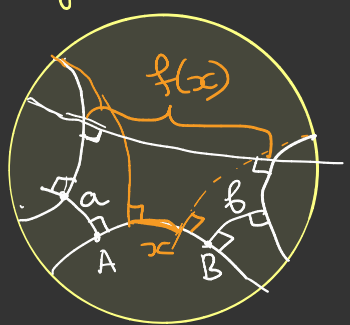
VII Деформации (H^2) и жесткость ($H^{\geq 3}$); штаны pants decomposition; mapping class groups; пр-ва модулей; пр-во Тайхмюллера; группа Торелли $\mathcal{I}_g$ и ядро Джонсона $\mathcal{K}_g$; твисты Дэна Dehn twists; curve graph и гиперб-по Громову; формулировки теорем жесткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

① Геометризация штанов, деформации

Предл. Для любых $a, b, c \geq 0$ существует и единств. (с точн. до изом.) прямоуг. 6-угольник в H^2, нечетные стороны которого имеют длины a, b, c.



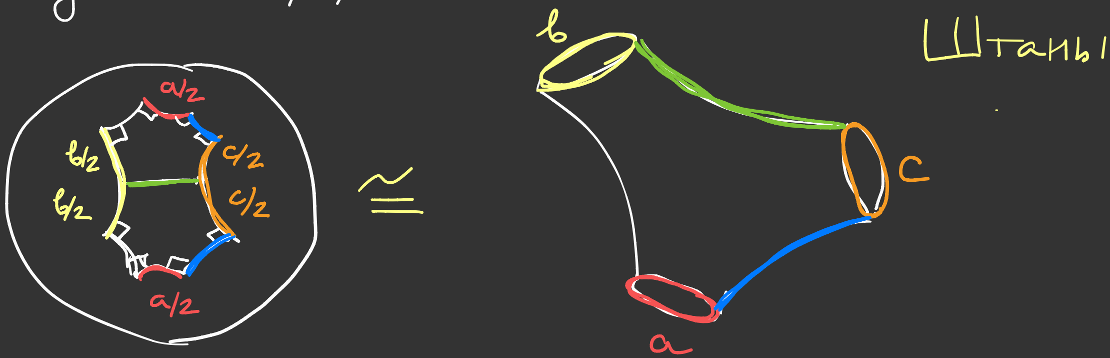
Док-во (идея).



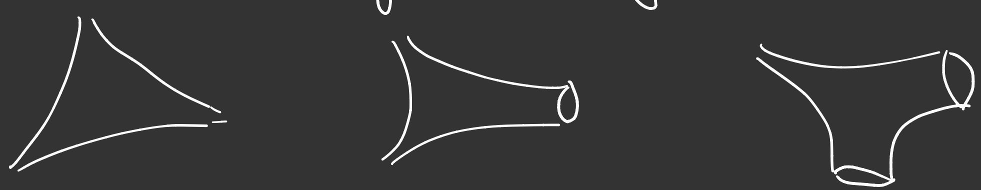
3 степени свободы для прямоуг. 6-ка.

Следствие $\forall a, b, c \geq 0$ $\exists!$ гиперб. пов-ть кон. объема с геодезическим краем, у которой краевые компоненты (окружности) имеют длины a, b, c.

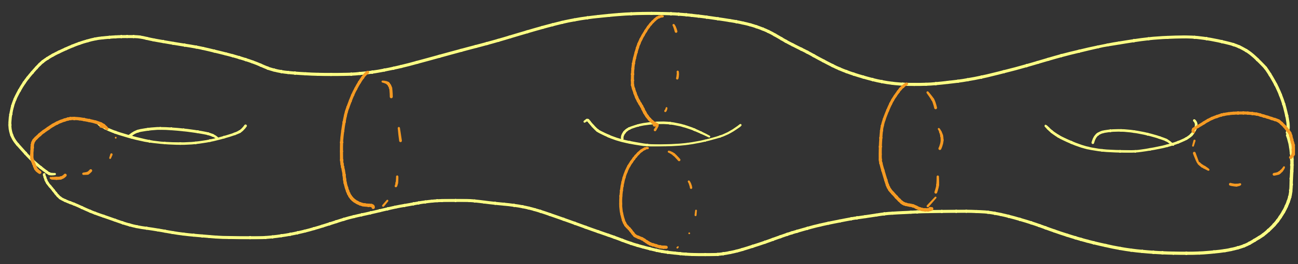
Док-во:



Замеч. Числа a, b, c могут быть и нулевыми:



Pants decompostion for S_g



Сколько таких разрезов? Ответ: $(g-1)+2(g-2)+2 = 3g-3$.

—"— штанов? Ответ: $2g-4+2 = (2g-2) = -\chi(S_g)$

(Аналогично для $S_{g,a,b}$ 

② Mapping class groups, moduli space, $Teich(S_g)$

Опр. $MCG(S_g) = Diffeo^+(S_g) / Diffeo^0(S_g) \cong Homeo^+(S_g) / Homeo^0(S_g)$.

$g=0 : S^2$
$g=1 : T^2 = E^2/\mathbb{Z}^2$
$g \geq 2 : H^2/\Gamma_g$.

$M_g = \{$ плоские ($g=1$) или гиперб. ($g \geq 2$) метрики на $S_g \} / \sim$ изометрии

M_g — пр-во модулей

$Teich(S_g) = Teich_g = \{$ —"— $\} / (\sim$ isotopic to id$)$

$Teich_g$ — пр-во Тайхмюллера

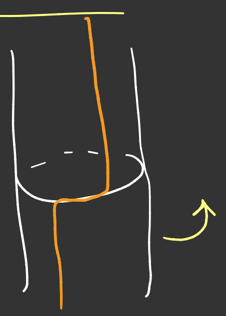
Имеем: $\boxed{Teich(S_g) / MCG(S_g) = M_g := M(S_g)}$.

Примеры 1) $MCG(S^2) = 1$, $MCG(D^2) = 1$. 2) $MCG(T^2) = SL_2(\mathbb{Z})$.

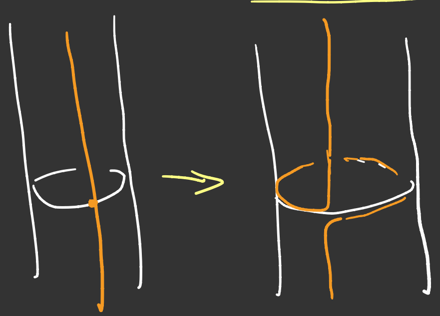
$Teich(T^2) \approx H^2$

$M(T^2) = H^2 / PSL_2(\mathbb{Z})$

Твисты



Твисты Дэна



Опр. Группа Торелли $\mathcal{T}_g$ опред из точной пос-ти:

$$1 \to \mathcal{T}_g \to T_g \to Sp_{2g}(\mathbb{Z}) \to 1$$

Ядро Джонсона $K_g = \langle$ твисты Дэна отн simple closed curves $\rangle \subseteq \mathcal{T}_g$.

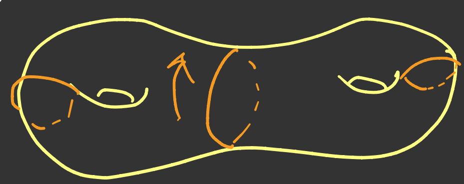
Теор. 1) $g=2$: $\mathcal{T}_g = K_g = MCG(S_g)$ — кон. представима

2) $g \geq 2$ $\mathcal{T}_g$ кон. предст.

3) K_g, $g \geq 4$, кон. порожд

Откр. пробл. 1) кон. порожд K_3
2) кон. предст. K_g

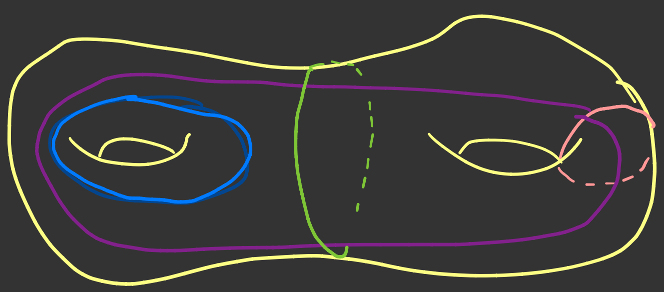
4) $\mathrm{Teich}(S_g) \cong \mathbb{R}^{6g-6}$



$(3g-3)$ = длины кривых

$(3g-3)$ = твисты вокруг

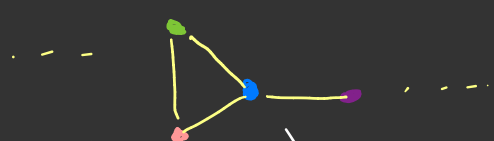
Curve graph для S_g



вершины $\longleftrightarrow$ классы изотопии замкн. кривых

ребра $\longleftrightarrow$ disjoint не пересек. кривые

$C(S_2) =$



Теор. 0) $C(S_g) = Cay(MCG(S_g))$

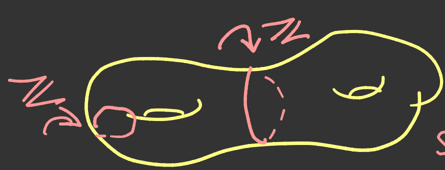
1) $C(S_g)$ — гиперб. по Громову.

2) $C(S_g)$ — связен

3) $C(S_g)$ - ∞-диаметр.

4) $MCG(S_g) \curvearrowright C(S_g)$ isom cocomp. но НЕ вп. разр.!

5) $MCG(S_g)$ содержит $\mathbb{Z}^2$ при $g \geq 2$, т.е не гиперб. по Громову



$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} < MCG(S_g)$
Stab(замкн. крив-й)

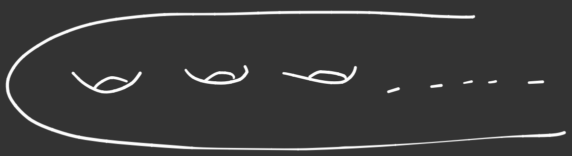
Теор

1) Громовские группы удовл. альт. Титса (АТ)

2) MCG тоже удовл. (АТ).

3) (D. Allcock '2020)

Big MCG НЕ удовл. (АТ)



③ Теоремы жёсткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

Теор. (Мостов '1968)

Пусть $M_1 = H^n/\Gamma_1$ и $M_2 = H^n/\Gamma_2$ — компактные гиперб. мн-я, при $n \geq 3$.

Тогда

$$\underset{\pi_1(M_1)}{\underset{\|}{\Gamma_1}} \cong \underset{\pi_1(M_2)}{\underset{\|}{\Gamma_2}} \iff M_1 \overset{\text{homeo}}{\approx} M_2 \iff M_1 \overset{\text{isom}}{\cong} M_2 \iff \exists g \in PO_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(H^n)$$
т.ч. $g\Gamma_1 g^{-1} = \Gamma_2$

$$\left(\iff M_1 \overset{\text{homotopy}}{\simeq} M_2\right)$$

Теор (Прасад '1973)

—"— M_1 и M_2 — некомп. кон. объема.

Теор (Margulis Superrigidity Theorem)

Надо подправить.
1) $G \not\cong SL_2(\mathbb{R}) \times K$
2) Mostow vs. Margulis

Пусть G — связная п/п гр. Ли, не имеет неприв. $\mathbb{Q}$-характ., $\Gamma_1, \Gamma_2 < G$ неприв. решетки.

Тогда всякий изоморфизм Γ_1 и Γ_2 индуц. сопряжением в G.