Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 6

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была)

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли.

① Действия групп гомеоморфизмов

② Группы изометрий Isom(M).

③ Теория групп: конечная порожденность, разрешимость, свободные группы, ...

④ Борелевские меры и мера Хаара.

⑤ Фундаментальные области дискр. групп.

---

⑥ Мера Хаара и фунд. области

⑦ Выпуклые многогранники и область Дирихле

---

⑧ Многообразия X/Γ, фунд. области, предельные точки, каспы, limit set

Теор. 1 Пусть M – полное связное риманово многообразие пост. секц. кривизны K. Тогда оно принадлежит одному из трех типов:

1) flat (плоское) (евклидова простр. форма): $M \cong E^n/\Gamma$, где $\Gamma < \mathrm{Isom}(E^n)$ – дискр., своб. от кручения; $K \equiv 0$

2) эллиптическое: $M \cong S^n/\Gamma$, где $\Gamma < \mathrm{Isom}(S^n)$ – дискр. без. круч.; $K > 0$

3) Гиперболическое: $M \cong H^n/\Gamma$, где $\Gamma < \mathrm{Isom}(H^n)$ – дискр. без. круч.; $K < 0$.

Более того, M – компактно $\Leftrightarrow$ фунд. мн-к D – комп $\Leftrightarrow$ Γ – равном реш.
$\mathrm{Vol}(M) < +\infty$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Vol}(D) < +\infty$ $\Leftrightarrow$ Γ – решетка.

Для 1) и 2) M-комп $\Leftrightarrow \mathrm{Vol}(M) < +\infty$, для 3) $\mathrm{Vol}(D) < +\infty$ равносильно тому, что $D = \mathrm{convhull}\{V_1, \ldots, V_N \in H^n \cup \partial H^n\}$.

Теор 2 Всякая решетка в связной группе Ли G конечно порождена и конечно представима.

Теор Вейля: $\Gamma = \langle \gamma \mid \gamma D$ смеж. с $D \rangle$

Замечание Как эффективно найти представление Γ в виде $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$? Ответ для $E^n/_\Gamma$, $S^n/_\Gamma$ и $H^n/_\Gamma$ – метод Пуанкаре (позже)

Теор 3. Пусть $F : H^n \to H^n$ – изометрия. Тогда выполнено ровно одно из трех условий:

1) $\mathrm{Fix}(F)$ состоит хотя бы из одной точки $x \in H^n$. (эллиптическая)
Если $x = 0 \in B^n$, то $F(x) = Ax$, $A \in O_n(\mathbb{R})$.

2) $\mathrm{Fix}(F) \cap H^n = \emptyset$, но $\exists p \in S^{n-1} = \partial H^n$: $p = \mathrm{Fix}(F) \cap \overline{H^n}$.
Тогда $F(x,t) = (Ax + b, t)$, где $p = \infty \in \partial H^n$ в H^n_+, $t > 0$, $A \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ и $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \neq 0$.
(параболическая)

3) $\mathrm{Fix}(F) \cap H^n = \emptyset$ и $\mathrm{Fix}(F) \cap \partial H^n = \{p, q\}$.
локсодромическая (гиперболическая)
Пусть $p = 0$ и $q = +\infty$ в H^n.
Тогда $F(x,t) = \lambda(Ax, t)$, где $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, $A \in O_{n-1}(\mathbb{R})$, $t > 0$.
Ось локс. эл-та – $\gamma(t)$, где $\gamma(-\infty) = p$, $\gamma(+\infty) = q$.

Более того, если $F \in \mathrm{Isom}(H^2) = PSL_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \tau \rangle$ или $\mathrm{Isom}(H^3) = PSL_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle \tau \rangle$, то

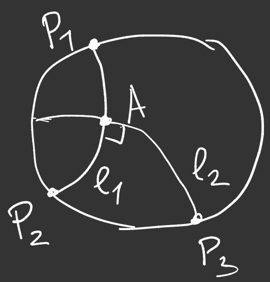
$F \in 1) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(F) \in (-2, 2)$

$F \in 2) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(F) = \pm 2$

$F \in 3) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(F) \in [-2,2]^c = \begin{cases} H^2 : \mathbb{R} \setminus [-2,2] \\ H^3 : \mathbb{C} \setminus [-2,2] \end{cases}$

Док-во: По теор. Брауэра $F:\overline{\mathbb{H}^n}\to\overline{\mathbb{H}^n}$ имеет неподв. точки.

Если есть $P_1,P_2,P_3\in Fix(F)\cap\partial\mathbb{H}^n$, то прямая $l_1=\langle P_1,P_2\rangle$ инвар. отн. F, а также прямая $l_2\perp l_1$, где $P_3\in l_2$, тоже инвар. относит. F. Тогда т. $A=l_1\cap l_2\in Fix(F)$.



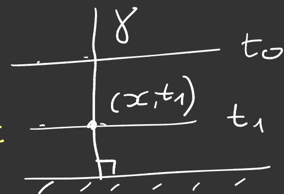
Если же неподв. точек ровно 1 и 2, то они $\in\partial\mathbb{H}^n$.

лемма

$\cosh\rho(x,i)=1/\cos\alpha$

В итоге, п.1) доказан ($F(x)=Ax$ – очевидно).

Если в п.2) $F(\infty)=\infty$, то F: орисф $\to$ орисферы. Пусть $F(O_0)=O_1$ и пусть $F':O_1\to O_0$ – т.ч. $F':(x,t_1)\mapsto(x,t_0)$.

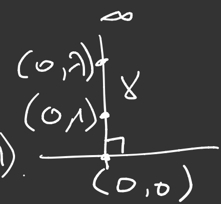


Проверьте, что F' – сжимающее отображение.

Тогда $F\circ F':O_1\to O_1$ тоже сжим. и имеет неподв. точку $(x,t_1)\in O_1$. Значит, $F(x,t_0)=(x,t_1)$. Тогда F сохр γ – геод.

Отсюда противоречие, т.к. нашлась неподв. т. $(x,0)$. След-но, орисферы все инвариантны. Поскольку $O_0\cong E^{n-1}$, то F действ. на O_0 как евкл. изометрия, т.е. $F(x)=Ax+b$ и $F(x,t)=(Ax+b,t)$

В случае 3) рассм. ось γ локс. эл-та F:



На γ движ. F действ. переносом: $(0,1)\mapsto(0,\lambda)$.

Тогда $dF|_{(0,1)}=\begin{pmatrix}A&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$, где $A\in O_{n-1}(\mathbb{R})$.

$\lambda\neq1$ невозм, т.к. иначе $(0,1)$ – неподв. т.

Наконец, пусть теперь $F\in Isom(H^2)$ или $Isom(H^3)$. М.сч., что $F\in PSL_2(\mathbb{R})$ или $F\in PSL_2(\mathbb{C})$.

- Если $F=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, где $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $\det(F)=1$. Тогда $F(z)=z$, где $z\in\mathbb{C}$

тогда и только тогда, когда $\frac{az+b}{cz+d}=z\iff cz^2+(d-a)z-b=0$.

Дискриминант $=(d-a)^2+4bc=(d+a)^2-4=tr^2(F)-4$.

Поэтому F имеет неподв. т. в $H^2 \Leftrightarrow tr^2(F)-4<0$. Если $tr^2(F)>4$, то $\exists\ p,q \in \mathbb{R}\cup\{\infty\} \simeq S^1 = \partial H^2$, где $p,q \in Fix(F)$.

Если $tr^2(F)=4$, то имеем ровну одну неподв. точку.

- Пусть теперь $F \in PSL_2(\mathbb{C})$. Тогда F сопряжена одной из матр:

$\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Получаем изометрии

$(z,t) \mapsto (z+1,t)$ и $(z,t) \mapsto (\lambda^2 z, |\lambda|^2 t)$.

$tr(F) = \pm 2$, $F(\infty)=\infty$.

$F(z,t)=(z,t) \Leftrightarrow |\lambda| = 1$, т.е. $(\bar\lambda = \lambda^{-1})$.

$tr(F) = \lambda + 1/\lambda \in (-2,2)$.

Если $|\lambda| \neq 1$, то $0,\infty \in Fix(F)$.

Опр.1 Пред. множество (limit set) $\Lambda_\Gamma := \{p \in \partial H^n \mid p = \text{пред.точка какой-то орбиты гр. } \Gamma\}$ (не зависит от орбиты).

Теор 4. 1) $\Lambda_\Gamma = clos(\Gamma x) \cap \partial H^n$. $(= \Lambda_\Gamma(x))$.

2) Если $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, то $\Lambda_{\Gamma_1} = \Lambda_{\Gamma_2}$. ($\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ соизмеримы, если $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ – подгр кон. инд в Γ_1 и Γ_2)

3) Либо $card(\Lambda_\Gamma) \leq 2$ (тогда Γ назыв элементарной), либо Λ_Γ – бесконечно, замкнуто, не имеет изолир. точек.

4) $\Lambda_\Gamma = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma$ – конечная гр. эллипт. эл-тов

$card(\Lambda_\Gamma)=1 \Leftrightarrow \Gamma$ – (бескон) порожд. параболич. эл-тами вокруг $p \in \partial H^n$, где $\Lambda_\Gamma = \{p\}$ и эллипт. эл-тами, сохр. p.

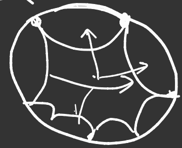
$card(\Lambda_\Gamma)=2 \Leftrightarrow \Gamma$ – бескон., содержащая только гиперб. (локсодр) эл-ты, фиксир. p_1 и p_2, где $\Lambda_\Gamma = \{p_1,p_2\}$, а также эллипт., которые фиксир. или переставляют p_1 и p_2.

5) $Vol(H^n/\Gamma) < +\infty \Rightarrow \Lambda_\Gamma = \partial H^n \simeq S^{n-1}$

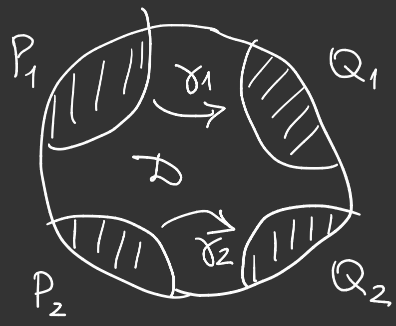
6) Мн-во параболич (и гиперб.) неподв. точек либо пусто, либо плотно в Λ_Γ.

Опр 2. Flat, elliptic, hyperbolic orbifold $= E^n/\Gamma,\ S^n/\Gamma,\ H^n/\Gamma$.

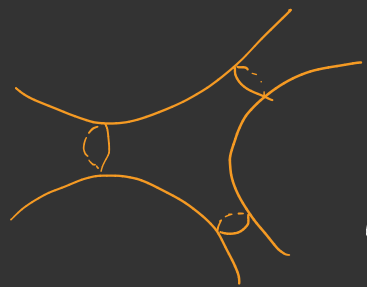
Касп для поверхности/орбифолда $\Longleftrightarrow$ касп для фунд. многогр. := цикл. идеальных вершин.



Пинг-понг лемма и группы Шоттки:

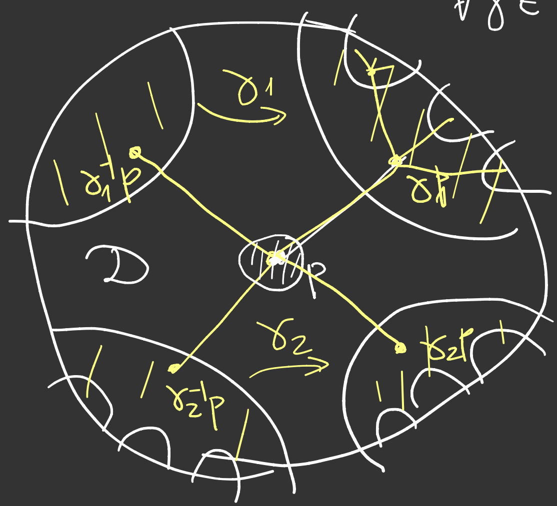


Пусть P_i, Q_i — полупл-ти в H^2, т.что $P_i \cap Q_j = \emptyset$.
Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in Isom^+(H^2)$, т.что $\gamma_j(P_j) = H^2 \setminus Q_j$.
Тогда $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ = свободная гр. F_2; действ. вполне разр.; фунд. мн-к для Γ = $= D = H^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup Q_1 \cup Q_2)$.

Более того, $H^2/\Gamma \cong$ 

и Λ_Γ = Канторовское мн-во на $S^1 \cong \partial H^2$

Док-во (идея)



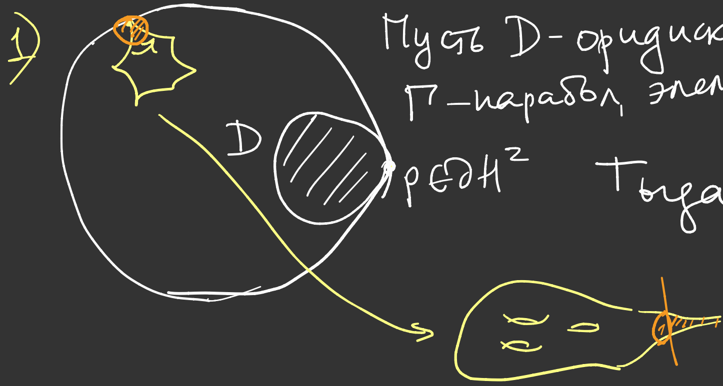
$\forall \gamma \in \Gamma$: $\gamma = (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_2^{2} \gamma_1 \ldots)$

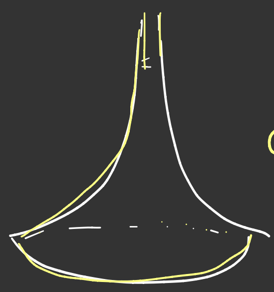
1) $\bigcup_\gamma \gamma D = H^2$ (замощение)

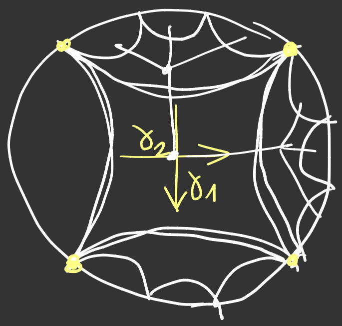
2) двойств. к замощению $\simeq Cay(\Gamma)$. (дерево)

3) Индукция по длине слов из $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}$.

9 Примеры

1) 

Пусть D - оридиск. Γ – парабол. элемент. группа, $p \in \partial H^2$. Тогда $D/\Gamma \cong$  $\subset \mathbb{R}^3$

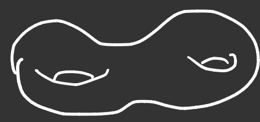
2) 

Тогда $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$

Тогда $H^2/_{\Gamma} \cong$  $\approx T^2 \setminus \{pt\}$.

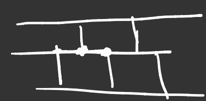
Т.е. $\pi_1(H^2/_{\Gamma}) = F_2$.

3) 

$\Gamma = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid \dots \rangle$, $H^2/_{\Gamma} \cong$  $\approx T^2 \# T^2$

⑩ Метод Пуанкаре

Пусть $X = E^n, S^n, H^n$, $\Gamma < \mathrm{Isom}(X)$ — дискр, $\mathcal{D}$ — фунд. мн-к.

1) М. считать, что пересечение смежных мн-ков = общая грань. 

2) Для всякой грани $F \in \mathcal{D}$ $\exists!$ движение $S_F : \mathcal{D} \to$ смежную с $\mathcal{D}$ камеру по грани F. — преобразование смежности

3). Пусть $F' = S_F^{-1}(F)$ ($F' = F$, если S_F - отражение).
Тогда $S_F \circ S_{F'} = 1$.

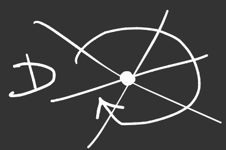
4) Цепь/галерея камер — послед-ть камер $P_0, P_1, \dots, P_k$, где P_j смежна с P_{j+1}. Цикл камер: $P_0 = P_k$.

Цепи камер $\xleftrightarrow{1-1}$ $s_1 \dots s_k \in \Gamma$

Лемма Если $\gamma\mathcal{D}$ и $\delta\mathcal{D}$ смежны по грани γF, тогда $\gamma^{-1}\delta = S_F$

5) Пусть F_0 — $(n-2)$-мерная грань мн-ка $\mathcal{D}$. Тогда

$F_0 \longleftrightarrow$ циклу $(n-1)$-мерных граней, содерж F_0.



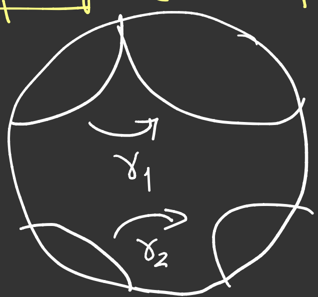
Циклы $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ соотн. вида $s_1 \cdot \ldots \cdot s_k = 1$.

Локальные соотношения $:=$ Соотн. вида $s_F \cdot s_{F'} = 1$ и соотн. $s_1 \cdot \ldots \cdot s_k = 1$ (циклы обхода вокруг $(n-2)$-мерных граней.

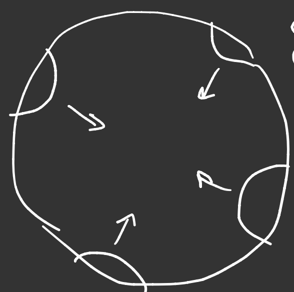
Теор (метод Пуанкаре)

Пусть $\Gamma < \mathrm{Isom}(X)$ — дискр. гр. движ; геометрически конечная, т.е. фунд. мн-к $\mathcal{D}$ для Γ имеет конечное число граней. Пусть S — преобр. смежности, R — лок. соотн. Тогда $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$.

Пример (геометр. конечная пов-ть)



$\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$. Тогда $H^2/_\Gamma \cong$



деформации: