Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 5

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была)

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли.

① Действия групп гомеоморфизмов

② Группы изометрий Isom(M).

③ Теория групп: конечная порожденность, разрешимость, свободные группы, ...

④ Борелевские меры и мера Хаара

⑤ Фундаментальные области дискр. групп.

⑥ Мера Хаара и фунд. области

Теор. 1 (Хаар)

На всякой лок. комп. топол. группе G (со счетн. базой) существ. и единств. (с точн. до множ.) левоинвариантная борелевская мера μ (б-конечная) ($\mu(gA) = \mu(A)$ для всех $g \in G$ и $A \in \mathcal{B}$).
мера Хаара

Опр 1 Правый сдвиг меры Хаара $\boxed{r_g(\mu) = \lambda(g) \cdot \mu}$, где $\lambda : G \to \mathbb{R}_{>0}$ — модулярная ф-ция. $(g \mapsto g^{-1})$

Группа G наз. унимодулярной, если $\lambda \equiv 1$.

Предл. 1 Компактные, абелевы или простые гр. Ли унимод-ны.
в частн. $SO^{\circ}_{p,q}$

Примеры (1) Мерой Хаара на $\mathbb{R}^n$ можно взять меру Лебега (как и на $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$)

(2) Покажем, что $d\mu_{\mathbb{R}_+} = \frac{dx}{x}$ явл. мерой Хаара на группе $\mathbb{R}_+$, где dx – мера Лебега на $\mathbb{R}$.

Действ., $\mu_{\mathbb{R}_+}(A) = \int\limits_A d\mu_{\mathbb{R}_+} = \int\limits_A \frac{dx}{x}$ и $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, если $y = c\cdot x$, т.е.

$$\mu_{\mathbb{R}_+}(c\cdot A) = \mu_{\mathbb{R}_+}(A).$$

(3) Мера Хаара на $GL_n(\mathbb{R})$ – $d\mu_{GL_n} = P(X)\cdot dX$, где dX - мера Лебега на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Заметим, что $GL_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \setminus \{X \mid \det X = 0\}$

Далее, $d(A\cdot X) = (\det A)^n \cdot dX$, поскольку при преобразовании $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax$ мера преобразуется $d(Ax) = (\det A)\cdot x$.

Следовательно, $d\mu_{GL_n} = \frac{dX}{(\det X)^n}$.

(4) Для группы строго верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} 1 & & x_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ имеем

$$d\mu = \prod_{i<j} dx_{ij} \text{ (т.е. просто мера Лебега на } \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}) = dx_{12}\wedge dx_{23}\wedge \ldots$$

(5) Мера Хаара на $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\pm I = \mathrm{Isom}^+(H^2)$

$\boxed{G = G_1\times G_2 \text{ – дифф. то } d\mu_G = d\mu_{G_1}\times d\mu_{G_2}}$

Используем разложение Ивасавы (KAN-разл.) $G = KAN$, где K - макс. комп. подгр., $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ – макс. абелева подалгебра, и $\mathfrak{n}$ - нильп. алгебра Ли, полученная через полож. систему корней.

В нашем случае, $K = SO_2(\mathbb{R})$, $A = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a\end{pmatrix} \,\middle|\, a>0\right\}$, $N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, b\in\mathbb{R}\right\}$.

Тогда $d\mu_K = d\theta$, где $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$; $d\mu_A = \frac{da}{a}$; $d\mu_N = db$.

Значит, $d\mu_{PSL_2(\mathbb{R})} = d\mu_K\times d\mu_A\times d\mu_N = \frac{1}{a}\,da\,db\,d\theta$.

(Имеется еще разложение Картана $G = KA^+K$, здесь $A^+ = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a\end{pmatrix} \,\middle|\, a>1\right\}$.

$(G = KP)$

Опр. 2 Дискр. подгр. $\Gamma < G$ назыв. решеткой, если $\mathrm{covol}(\Gamma) = \mu(G/\Gamma) < +\infty$ и равномерной решеткой, если G/Γ - компакт.

Предл. 2 Если в лок. комп. гр. G есть решётка, то G – унимод.
[? Идея: $\mu(G/\Gamma) = \mu((G/\Gamma)\cdot g) = r_g(\mu)(G/\Gamma) = \lambda(g)\,\mu(G/\Gamma)$ и $\lambda|_\Gamma = 1$]

Опр 3 Подгр. $\Gamma_1, \Gamma_2 < G$ назыв. соизмеримыми ($\Gamma_1 \sim \Gamma_2$), если $[\Gamma_1 : \Gamma_1\cap\Gamma_2] < +\infty$ и $[\Gamma_2 : \Gamma_1\cap\Gamma_2] < +\infty$. Группа $\mathrm{Comm}_G(\Gamma) = \{g \mid g\Gamma g^{-1} \sim \Gamma\}$ называется соизмерителем Γ в G.

Предл. 3 Пусть $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ в G. Тогда если Γ_1 явл. дискретной; решёткой или равном. решёткой, то и Γ_2 такая же.

- - - - - -

Пусть теперь $X = G/K$, где $K < G$ – комп. подгр.

Предл. 4 (1) $\Gamma < G$ решётка $\Leftrightarrow$ $\mathrm{vol}(X/\Gamma) < +\infty$
— // — равном. решётка $\Leftrightarrow$ X/Γ – компакт.

(2) Пусть $H < G$ – замкн. подгр., $\Gamma < G$ – решётка. Группа Γ явл. дискр. подгр. преобр (т.е. Γx дискр. и Γ_x конечны) на $X = G/H$ $\Leftrightarrow$ H компактна.

- - - - - - - -

Пусть $\Gamma < \mathrm{Isom}(X)$ дискр.

Опр 4. Замкн. область $D \subset X$ назыв. фунд. областью для Γ, если

1) $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma(D) = X$

2) $\mathrm{int}(\gamma D) \cap \mathrm{int}(\gamma' D) \neq \varnothing \Leftrightarrow \gamma = \gamma'$

3) (лок. кон) $\forall p \in X \;\exists\, \varepsilon > 0 : \#\{\gamma\in\Gamma \mid B(p,\varepsilon)\cap \mathrm{int}(\gamma D) \neq \varnothing\} < +\infty$.

Теор. 2 $\Gamma < G$ – решётка $\Leftrightarrow$ $\mathrm{vol}(D) < +\infty$ и
Γ – равном. решётка $\Leftrightarrow$ D – компактна.

Док-во: Рассм. $\pi : X \to X/\Gamma$. Оно непр. и открыто.
Пусть $\pi_D = \pi|_D : D \to X/\Gamma$.
Часть "$\Leftarrow$" очевидна, т.к. непр. образ компакта – компакт.

Часть "$\Rightarrow$". Пусть X/Γ — компакт, $x_n \in D$. Перейдя к подпосл-ти, м.сч. $\pi(x_n) \to \pi(x)$, т.е. $\exists \gamma_n \in \Gamma : \gamma_n x_n \to x$.

Тогда м.сч., что все $\gamma_n = \gamma$ и $\gamma x_n \to x$, т.е. $x_n \to \gamma^{-1}(x) \in D$.

(из усл-я лок-кон)

7 Выпуклые многогранники и область Дирихле

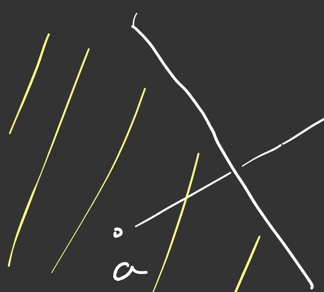
Пусть X — полное, связное, односвязное мног-ие, пост. секц. крив.
$X = E^n, S^n, H^n$.

Опр5. Выпуклый многогранник в X — это пересечение

$$P = \bigcap_{k=1}^{N} H_k^-, \quad \mathrm{int}(P) \neq \varnothing.$$

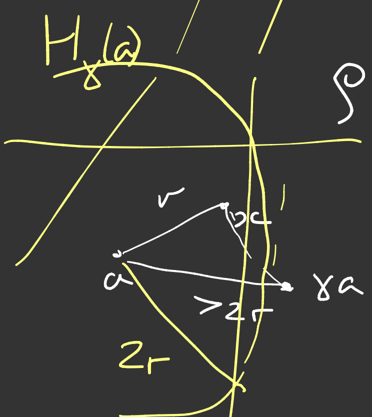
Обобщенный выпуклый многогранник — $P = \bigcap_\alpha H_\alpha^-$, т.что локально P — вып. мн-к (т.е. всякий шар пересекает лишь кон. число H_α).

Теор3. Пусть $\Gamma < \mathrm{Isom}(X)$ — дискр. гр., и пусть $g \neq 1 \in \Gamma$.
Пусть $a \in X$, т.что $\Gamma_a = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma a = a\} = \{1\}$. Тогда область Дирихле с центром в т. a $D(a) = \bigcap_{1 \neq \gamma \in \Gamma} H_\gamma(a)$, где $H_\gamma(a) = \{x \in X \mid \rho(a,x) \le \rho(\gamma a, x)\}$, является



1) обобщ. вып. многогранником в X
2) фунд. областью для гр. Γ.

Док-во. 1) Если $\rho(x,a) = r$, то при $\rho(\gamma a, a) > 2r$ имеем $\rho(x,a) < \rho(x, \gamma a)$.
Имеется лишь кон. число $\gamma \in \Gamma$: $\rho(\gamma a, a) \le 2r$.
Отсюда следует, что $D(a)$ — обобщ. вып. мн-к.
Гиперпл-ти ("грани"): $\{x \mid \rho(x,a) = \rho(x, \gamma a)\}$

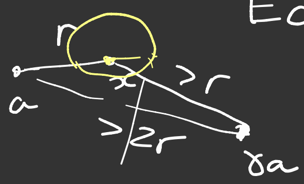


2) $D(a) = \{x \mid \rho(x,a) \le \rho(\gamma x, a)\ \forall \gamma \ne 1\} \overset{\text{опр.}}{=} \{x \mid \rho(x,a) \le \rho(x,\gamma a)\ \forall \gamma\}$

$\mathrm{int}(D(a)) = \{x \mid \rho(x,a) < \rho(\gamma x,a)\ \forall \gamma \ne 1\}$.

Ясно, что $\gamma \cdot \mathrm{int}(D(a)) \cap \mathrm{int}(D(a)) = \varnothing$ при $\gamma \ne 1$.

Если $\rho(x,a) = r$, то при $\rho(\gamma a, a) > 2r$ имеем $x \notin \underline{\gamma D(a) = D(\gamma a)}$.



Если $x' \in B(x,\varepsilon)$, то при $\rho(\gamma a, a) > 2(r+\varepsilon)$ имеем $x' \notin \gamma D(a)$. Значит, $B(x,\varepsilon)$ пересекает лишь кон. число $\gamma D(a)$. $\blacksquare$

Теор 4. Пусть D_1 и D_2 — фунд. об-ти для Γ. Тогда $\mathrm{vol}(D_1) = \mathrm{vol}(D_2)$.

Док-во: Имеем, $D_1 = \bigcup_\gamma (D_1 \cap \gamma D_2)$. Тогда

$\mathrm{vol}(D_1) = \sum_\gamma \mathrm{vol}(D_1 \cap \gamma D_2)$; $D_2 = \bigcup_\gamma (D_2 \cap \gamma D_1)$, $\mathrm{vol}(D_2) = \sum_\gamma \mathrm{vol}(D_2 \cap \gamma D_1)$

Осталось заметить, что $\mathrm{vol}(D_2 \cap \gamma D_1) = \mathrm{vol}(D_1 \cap \gamma^{-1} D_2)$. ($\gamma \in \Gamma < \mathrm{Isom}(X)$) $\blacksquare$