Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович

(Сколтех & МФТИ)

Лекция 4

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была:)

1. – гладкие мн-я,
2. – группы Ли,
   – римановы мн-я.
3. – симм. однор. пр-ва,
   – пр-ва пост. секц. кривизны – E^n, S^n, H^n.
4. – (гиперболическое) пр-во Лобачевского H^n.
5. Ещё немного римановой геометрии
6. Ещё немного геометрии Лобачевского.

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли.

1. Действия групп гомеоморфизмов

Пусть X – топол. пр-во, и $G \leq \mathrm{Homeo}(X)$ – (под)группа гомеоморфизмов $g: X \to X$. Тогда действие $G' \curvearrowright X$ можно воспринимать через (гомоморфизм) $\varphi: G' \to G$.

Опр 1. Фактор-пр-во – $X/G = \{ \mathrm{Orb}(x) = Gx \mid x \in X \}$, где $G < \mathrm{Homeo}(X)$.
Снабжается стандартной фактортопологией: пусть $p_G : X \to X/G$ – проекция, тогда $U \subset X/G$ назыв. открытым, если $p_G^{-1}(U)$ откр. в X.

Опр 2. Действие $G \curvearrowright X$ назыв.
- свободным, если $gx \neq x$ $\forall g \neq e \in G$ и $\forall x \in X$.
- вполне разрывным (properly discontinuous), если $\forall x, y \in X$ $\exists U_x \ni x$ и $U_y \ni y$, где $U_x, U_y \in \tau_X$, т.ч. $\#\{ g \in G \mid g(U_x) \cap U_y \neq \varnothing \} < +\infty$.

Предл. 1 Пусть $G \curvearrowright X$ – св. Хаусд. пр-ве. Тогда след. ус. экв.:
1) $G \curvearrowright X$ свободно и вп. разр.;
2) $X/_G$ явл. хаусд. и отображение $X \to X/_G$ – накрытие.

Накрытия типа $X \to X/_G$ наз. регулярными. Накр. $f: X \to Y$ – рег, если $f(\pi_1(X)) \lhd \pi_1(Y)$. В этом сл. $G = \pi_1(Y)/_{f(\pi_1(X))}$.

Теор 1. Всякое лин.-св. лок-стягиваемое хаусд. топ. пр-во X есть фактор $\tilde{X}/_G$ универс. накр-я $\tilde{X}$ по G, где $G \curvearrowright X$ свободно и вполне разр. и $G = \pi_1(X)$.

Задача 1 Пусть $G \curvearrowright X$ – лок. комп. (базис топ. U_α: $\operatorname{clos}(U_\alpha)$ = комп.) топ. пр-ве. Тогда С.У.Э.
1) $G \curvearrowright X$ вп. разр.
2) $\underset{\text{компакт}}{\forall K \subset X}$ $\#\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\} < +\infty$.
3) отобр $G \times X \xrightarrow{F} X \times X$, где $(g, x) \mapsto (g(x), x)$, явл. собств. (proper), то есть F^{-1}(компакт) = компакт.

Опр 3. $G \curvearrowright X$ – кокомпактно, если $\exists$ компакт $K \subset X$, т.ч. $\underset{\underset{\bigcup_g g(K)}{\parallel}}{G \cdot K} = X$

Задача 2. а) $G \curvearrowright X$-кокомп. $\Rightarrow$ $X/_G$ - комп. топ. пр-во
б) Пусть X - лок.-комп. топ пр-во, $G \curvearrowright X$ т.что $X/_G$ – комп. Тогда $G \curvearrowright X$ - кокомп.

(2) Группы изометрий Isom(M).
(УкВ.)

Опр 4. Топ. пр-во $C(X, Y)$ можно снабдить compact-open topology, т.е. базис топологии состоит из $U_{K,V} := \{f: X \to Y \mid f(\underset{\text{compact}}{K}) \subset V \in \tau_Y\}$

Замечание: Если $Y = (Y, \rho_Y)$, то compact-open top $\Leftrightarrow$ топологии равном. сход-ти на компактах, т.е. $\{f_i\} \in C(X,Y)$ – сход к $f \in C(X,Y)$, если $\forall K \subset X$: $f_i|_K \xrightarrow{\text{равн.}} f|_K$.

Опр 5 $\operatorname{Isom}(M) = \{g$ – изометрия $M\} \ll \operatorname{Homeo}(M)$.
g = diffeo, $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$.

Теор 2 (Myers – Steenrod)
$\operatorname{Isom}(M)$ – группа Ли с топологией, совм. с compact-open top. Отобр. $F: \operatorname{Isom}(M) \times M \to M \times M$, $(g, p) \mapsto (g(p), p)$ явл собств.

Предл. 2 1) M – компактно $\Rightarrow$ $Isom(M)$ – комп гр. Ли

2) $\forall x \in M$ стабилизатор $G_x = Stab(x) = \{ g \in G = Isom(M) \mid g(x) = x \} < G$ является компактной подгр. Ли.

Обозн. $Isom^+(M) < Isom(M)$ – подгр. индекса 2 изометрий, сохр. ориент.

Задача 3 Пусть M – рим. мн-е. Докажите, что $\Gamma \curvearrowright M$ вп. разр. $\Leftrightarrow$ $\Gamma < Isom(M)$ дискр. подгр.

Если M полно, то эти усл-я равносильны тому, что $\forall x \in M$ и $\{g_n\}$ – бескон посл-ти

орбита Γx дискр, стабил. Γ_x конечны $\Big\} \Longleftrightarrow$ предел $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho(x, g_n(x)) = +\infty$.

Hint: Теор. Асколи-Арцела

Предл. 3 Пусть $\Gamma < Isom(M)$ – т.что $\Gamma \curvearrowright M$ – свободно, вп. разр. Тогда существует единств. стр-ра риманова мн-я на $M/_\Gamma$, т.что $\pi: M \to M/_\Gamma$ – лок. изометрия.

Док-во: Пусть $U \subset M/_\Gamma$: $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup\limits_{i \in I} U_i$, где $\pi|_{U_i}: U_i \to U$ – гомеоморфизм

Тогда берём U_1 и переводим рим стр-ру с U_1 на U. Она не зависит от U_1, поскольку $\forall U_i \; \exists g_i : g_i(U_1) = U_i$, где $g_i \in \Gamma < Isom(M)$. ∎

3) Теория групп: конечная порожденность, разрешимость, свободные группы, ...

Опр 6 Представление в виде образующих и опред. соотн-й: $G = \langle S \mid R \rangle$

порождающие $s \in S \subset G$; слова из $s_j^{\pm 1} \ldots = e$ (соотношения)

G – конечно представима, если $card(S), card(R) < +\infty$

$\Downarrow$

G – конечно порождена, если $card(S) < +\infty$.

$rank(G) = card(S_{min})$

Опр 7. Свободная группа $F(S) = \langle S \mid \varnothing \rangle$; $rank(F) = card(S)$

Свободное произведение $G_1 * G_2 = \langle S_1, S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$.

Т.е. своб. гр. ранга n — $F_n = \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}$.

Опр 8 Коммутатор групп $[G,H] = \langle [g,h] = ghg^{-1}h^{-1} \mid g \in G, h \in H \rangle = [H,G]$

Коммутант группы G – это $[G,G]$. Производный ряд $G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright \ldots$, где $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$. Группа G разрешима, если $\exists n: G^{(n)} = e$.

Предл. 4. 1) $[G,G] = \min\limits_{H<G} \{ H \mid G/_H \text{ – абелева} \}$.

2) Подгруппа и фактор разр гр. тоже разрешимы.

3) Разр. группа содержит нетрив. абелеву подгруппу.

4) Если $F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} < G$, то G НЕ разрешима.

Опр 10. Группа G проста, если она не содерж нетрив. норм. подгрупп.

Простая группа Ли — связная, неабелева гр. Ли, не содерж. —"—.

Опр. 11 Если какое-то свойство $\star$ выполняется для подгруппы конечного индекса группы G, то говорят "G виртуально обладает свойством $\star$". Бывают виртуально абелевы, виртуально разрешимые, и т.д.

Теор. 3 (Лемма Сельберга)

Пусть $k \subseteq \mathbb{C}$ – поле, напр., $k = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \ldots, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathrm{char}(k) = 0$, и пусть $G < GL_n(k)$ – конечно порожденная линейная подгруппа. Тогда G содержит нормальную подгруппу конечного индекса, свободную от кручения (т.е. $\exists H \lhd G$, $[G:H] < +\infty$ и $\forall h \in H$ $\mathrm{ord}(h) = +\infty$). G is virtually torsion-free.

Идея док-ва: Искомая $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, где $\varphi : G \to SL_n(\mathbb{Z}_p)$ для достаточно большого простого $p \in \mathbb{N}$. $\boxed{\,}$

Примеры. 1) Пусть $\ell_1 \parallel \ell_2 \subset \mathbb{E}^2$. Тогда $D_\infty = \langle R_{\ell_1}, R_{\ell_2} \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$

2) Группа S_3 разрешима, но S_n, $n \geq 5$, не разрешима.

Теор. 4 Группа $SO^\circ(p,q)$ проста при $p+q \geq 3$, где $(p,q) \neq (2,2), (4,0), (0,4)$.
(В част, $PO_{n,1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$)

Теор. 5 1) Пусть F_n – своб. группа ранга $n \geq 2$. Тогда $[F_n, F_n] = F_\infty$

2) Если $F = F_n, n \geq 2$, и $F > H_1 > H_2 > \ldots$ – убывающая цепочка, где $[H_k : H_{k+1}] < +\infty$, то $\mathrm{rank}(H_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$.

3) F_n $(n \geq 2)$ не разрешима. Более того, если $F_2 < G$, то G не разрешима.

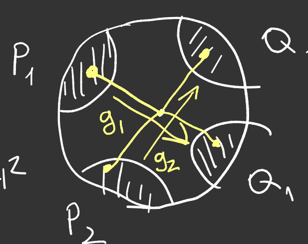
см. Магнус, Каррас, Солитер

Теор. 6 (Альтернатива Титса)

Пусть $k \subseteq \mathbb{C}$ – поле, $\mathrm{char}(k) = 0$. Тогда всякая подгр. $G < GL_n(k)$ явл. либо виртуально разрешимой, либо содержит F_n, $n \geq 2$.

Док-во основано на:

Ping-Pong Lemma: Пусть $g_1, g_2 \in \mathrm{Bij}(X)$, и пусть $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \subset X$, т.что $P_i \cap Q_j = \varnothing$ $\forall i,j$ и
$$g_j(X \setminus P_j) = Q_j. \text{ Тогда } \Gamma = \langle g_1, g_2 \rangle \cong F_2.$$



Частный сл-й $\Gamma = \langle g_1, g_2 \rangle \cong F_2 < SL_2(\mathbb{R})$, где
$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

④ Борелевские меры и мера Хаара

Опр 12. Борелевское мн-во $A \subset X$ — получено из открытых (τ_X) с помощью $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, и дополнений. Борелевские мн-ва образуют борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$ на X. Борелевская мера μ — это σ-аддит ф-ция $\mu : \mathcal{B} \to [0,+\infty)$.

Мера конечная, если $\mu(X) < +\infty$, и лок. кон., если $\forall x \in X \ \exists U_x \ni x$, т.ч. $U_x \in \mathcal{B}$ и $\mu(U_x) < +\infty$.

Теор. 7 (Хаар)

На всякой лок. комп. топол. группе G (со счетн. базой) существ. и единств. (с точн. до множ.) левоинвариантная борелевская мера μ (σ-конечная) — мера Хаара. ($\mu(gA) = \mu(A)$ для всех $g \in G$ и $A \in \mathcal{B}$).

Опр 13 Правый сдвиг меры Хаара $r_g(\mu) = \lambda(g) \cdot \mu$, где $\lambda : G \to \mathbb{R}_{>0}$ — модулярная ф-ция.

Группа G наз. унимодулярной, если $\lambda \equiv 1$.

Предл. 5. Компактные, абелевы или простые гр. Ли унимод-ны. (в частн. $SO^{\circ}_{p,q}$)

Док-во: Если G компактна, то $\lambda(G) \subset \mathbb{R}_+$ — компактно, т.е. $\lambda \equiv 1$.

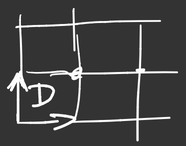
Если G — абелева гр., то очевидно. Если G — проста, то $\ker(\lambda)^{\circ} = G$. ☐

Опр. 14 Дискр. подгр. $\Gamma < G$ называется решеткой $\underset{\text{covol}(\Gamma)}{\mu(G/\Gamma)} < +\infty$, и равномерной решеткой, если G/Γ — комп.

Примеры

$\Gamma = \mathbb{Z}^2 \cong T_{e_1,e_2} \curvearrowright E^2$ своб вп. разр. В данном случае $\mathrm{Isom}(E^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes O_2(\mathbb{R})$.

Т.е. $E^2 = \mathrm{Isom}(E^2)/O_2(\mathbb{R}) = G/K$, $\mathbb{Z}^2 < G$.



Тогда $\text{covol}(\Gamma) < +\infty \iff \mathrm{vol}(E^2/\Gamma) < +\infty$

G/Γ комп $\iff E^2/\Gamma$ компакт.

Здесь $E^2/\Gamma = \mathrm{Tor}$ (компакт).

(5) Фундаментальные области дискр. групп

Пусть $\Gamma < \mathrm{Isom}(X)$ дискр.

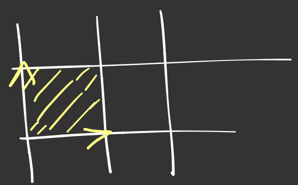
Опр 15. Замкн. область $D \subset X$ называется фунд. областью для Γ, если

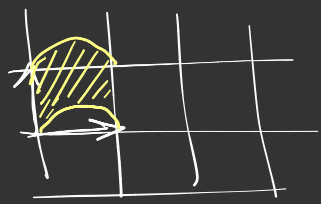
1) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) = X$

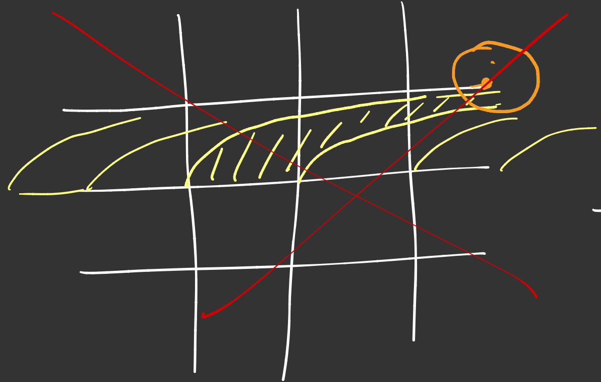
2) $\mathrm{int}(\gamma D) \cap \mathrm{int}(\gamma' D) \neq \varnothing \Leftrightarrow \gamma = \gamma'$

3) (лок. кон) $\forall p \in X \ \exists \varepsilon > 0 : \#\{\gamma \in \Gamma \mid B(p,\varepsilon) \cap \mathrm{int}(\gamma D) \neq \varnothing\} < +\infty$.

Примеры: 1) $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{E}^2$

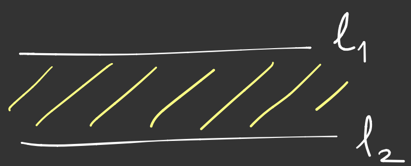






— это НЕ фунд. область!

2) $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle R_{l_1}, R_{l_2} \rangle$



или $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{E}^2$: $\mathbb{Z} = \langle \gamma \rangle$, $\gamma(l_1) = l_2$ пар. перенос.

Здесь $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z} =$

3) $\mathrm{Sym}(P) \curvearrowright$ пов-ти P