Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

Лекция 3.

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была:)

① – гладкие мн-я,
② { – группы Ли,
– римановы мн-я.
③ – симм. однор. пр-ва,
– пр-ва пост. секц. кривизны – E^n, S^n, H^n.
④ – (гиперболическое) пр-во Лобачевского H^n.

⑤ Ещё немного римановой геометрии

Опр. Изометрия $f: (M, g_M) \to (N, g_N)$ – диффеоморфизм, т.что $u, v \in T_pM$
$\langle u, v\rangle_M = \langle df(u), df(v)\rangle_N$.

Теор. Пусть $f, g: M \to N$ – (локальные) изометрии связных римановых мн-ий.
Если $\exists p \in M$: $f(p) = g(p)$ и $df_p = dg_p$, то $f \equiv g$.

Опр. Лок. изом $f: M \to N$ – отобр, т.ч. $\forall p \in M$ $\exists U \subset M$: $f|_U$ – изом. на $f(U)$.

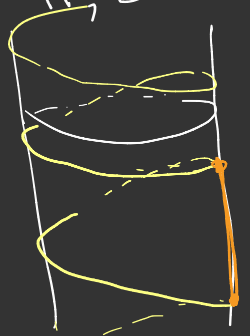
Теор. Пусть $f: M \to N$ – лок. изом.
1) Если M – полное, то f – накрытие
2) Пусть f – накрытие. Тогда M полное $\Leftrightarrow$ N полное
3). Если f – накрытие степени d, то $Vol(M) = d \cdot Vol(N)$.

Опр. Подмн-е $M \subset N$ назыв. вполне геодезическим, если всякая геодезическая в M с индуц. метрикой будет геод. в N.

Примеры: 1) Геодезические на мн-ии M – 1-dim totally geodesics of M.

2) Прямые и плоскости в E^n, S^n, H^n – вполне геод. и др. нет!

3) $H^n, S^n \subset E^{n+1}$ – не явл. вполне геод.

4)  $= \mathbb{R}\times S^1 = N$; $M = (t, e^{it})$ – геод. в N,

но не минимизирует расстояние.

<u>Опр.</u> Риманово мн-е с краем $(M, \partial M, g)$: карты 2х видов

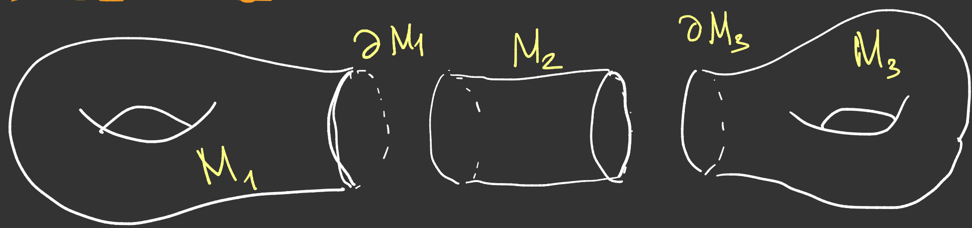
$g(\cdot,\cdot)>0$. касат. пр-ва 2х типов

T_pM и $T_p^+M \simeq \mathbb{R}^n_+$.

$/\!/\!/\!/\!/\!/ = \mathbb{R}^n_+ = \{x_n \geq 0\}$.

Особый случай: ∂M – вполне геод. подмн-е M

<u>Теор</u> $\partial M = (n-1)$-dim риманово подмн-е без края!



<u>Опр.</u> Riemannian orbifold $\mathcal{O}$:

$U_i \approx \overset{\tilde{U}_i}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^n}} / \Gamma_i$, где

Γ_i – конечная группа

Атлас $\{(\tilde{U}_i, \Gamma_i, U_i, \varphi_i)\}$.

Сингулярное мн-во/локус $\Sigma_{\mathcal{O}}$ – точки, где "ломается ст-ра мн-я",

т.е. $\Gamma_x \neq e$. $\boxed{\cdot x}$.

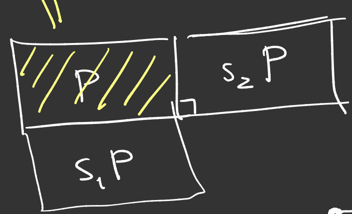
(X, G)-мн-я.

<u>Примеры</u>:

1) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 

многообразие

2) $\mathbb{R}^2/\Gamma$, где Γ – порожд. отраж.:



$\Gamma \cong D_\infty \times D_\infty$, где

$D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

орбифолд

3) В п.2) можно рассмотреть

$\mathcal{O}' = \mathbb{R}^2/\Gamma^+$, где $[\Gamma : \Gamma^+] = 2$

орбифолд

сохр. ориент.

 $\Sigma_{\mathcal{O}'} = 4$ точки, $\mathcal{O}' \approx S^2$.

Теор (Killing, Hopf)

Пусть M — связное, односвязное, полное риманово мн-е пост секционной кривизны K. Тогда

изометрично!

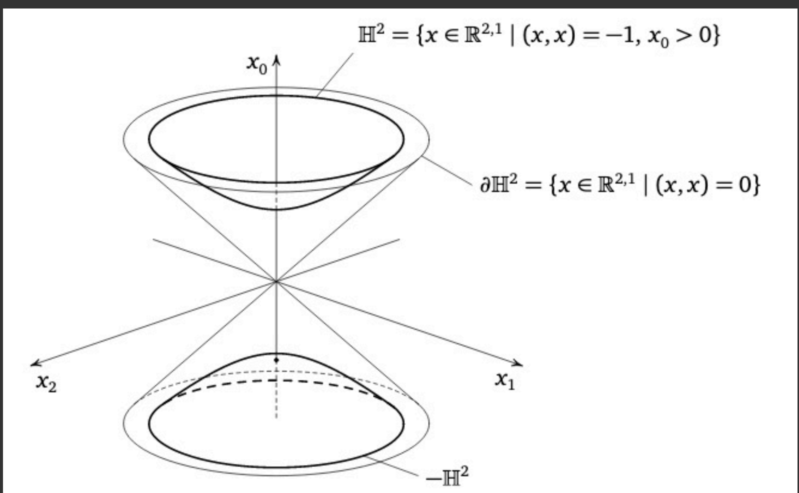
$$M \cong E^n, \quad S^n, \quad H^n.$$
$$K\equiv 0 \qquad K\equiv 1 \qquad K\equiv -1$$

~1926

Теор (Cartan, Hadamard).

Пусть (M,g) — полное связное риманово мн-е с секц. крив. $K\leq 0$. Тогда $\forall p\in M$ $\exp_p : T_pM \to M$ — гладкое накрытие; т.е. $\widetilde{M} \underset{\text{diffeo}}{\cong} \mathbb{R}^n$ и если M — односв. мн-е, то M диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

⑥ Ещё немного геометрии Лобачевского.



$$\langle x,x\rangle_{n,1} = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = f_n(x)$$

$\langle x,x\rangle < 0$ time-like

$\langle x,x\rangle = 0$ light-like

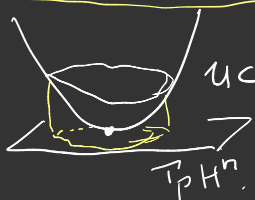
$\langle x,x\rangle > 0$ space-like

$$T_pH^n = \ker df_p = \{x \mid \langle x,p\rangle = 0\}$$
$= p^\perp$, тогда $\langle\cdot,\cdot\rangle\big|_{T_pH^n} > 0$.

$$H^n:\ x_0^2 = 1 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

В лок. коорд. $x_1,\dots,x_n$: $ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2 =$
$$= -\frac{(x_1dx_1 + \dots + x_ndx_n)^2}{(1+x_1^2+\dots+x_n^2)} + dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Элемент объёма: Пусть $U' \subset T_pH^n$, где $p = (1,0,..,0)$. Тогда



$$\mathrm{Vol}(U) = \int_{U'} \frac{1}{(1+x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}}\, dx_1\dots dx_n.$$

Геодезические: $\gamma(t)\in X^n$, $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$, $\|v\|=1$

S^n: $\gamma(t)=\cos(t)\cdot p+\sin(t)\cdot v$

E^n: $\gamma(t)=p+t\cdot v$

H^n: $\gamma(t)=\cosh(t)\cdot p+\sinh(t)\cdot v$.

Теор. H^n – полное, односв., связное риманово мн-е с рим. метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle_{n,1}>0$ на TH^n, согласованной метрикой $\cosh\rho(x,y)=-\langle x,y\rangle_{n,1}$.

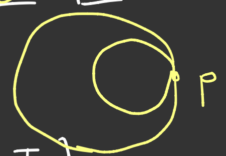
Теор.

1) $Isom(H^n)\simeq PO_{n,1}(\mathbb{R})=O_{n,1}(\mathbb{R})/\{\pm I\}$

2) $H^n\simeq PO_{n,1}(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R})$. $(=G/K)$

3) The hyperbolic sphere $\{x\in H^n \mid \rho(x,p)=const\}\overset{isom}{\simeq} S^{n-1}$ with a center $p\in H^n$

4) the horosphere (орисфера) $\{x\in H^n \mid \langle x,p\rangle=const\}\overset{isom}{\simeq} E^{n-1}$ with a center $p\in\partial H^n$



5) $Isom^+(H^2)\simeq PSL_2(\mathbb{R})=SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$

6) $Isom^+(H^3)\simeq PSL_2(\mathbb{C})=SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$.

Отражение относ. подпр-ва S: $(S\cong H^k)$, $W\sim(k,1)$

$R_S: H^n\to H^n$, т.что $R_S|_W=Id$ и $R_S|_{W^\perp}=-Id$, где $S=W\cap H^n$, $W\subset\mathbb{R}^{n,1}$

Таким обр., $Fix(R_S)=S$, причем $\forall\, u\perp S$ верно $R_S(u)=u$ (инвариант)

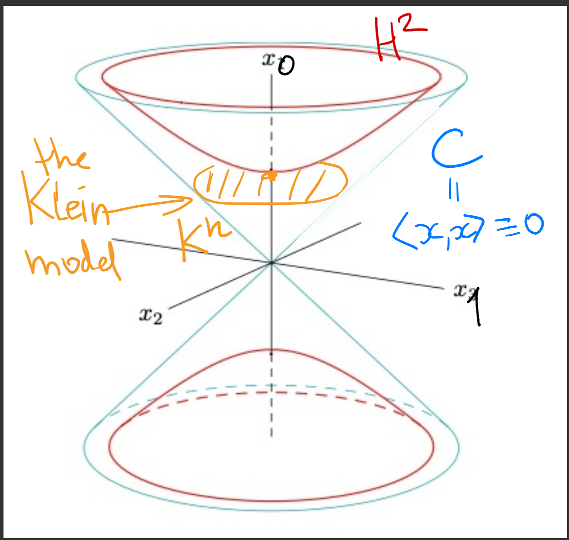
Более того, $R_S\in Isom^+(H^n)\iff codim(S)$ – четное число.

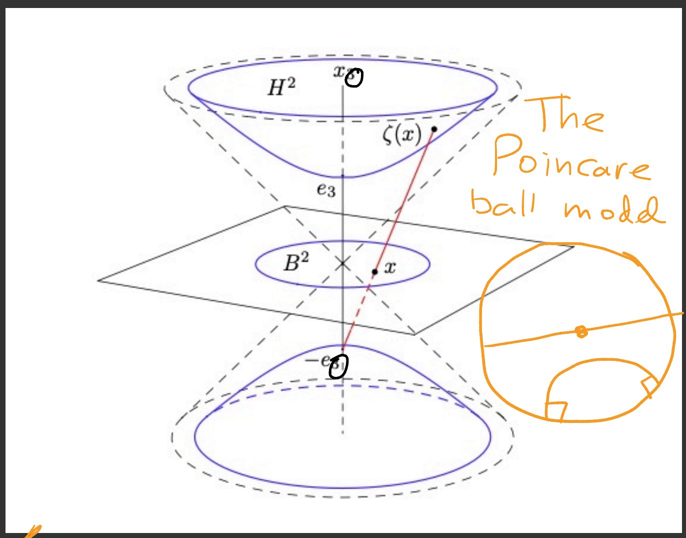
Частный случай, $R_e(x)=x-2\frac{(e,x)}{(e,e)}e$ – отр. отн гиперпл-ти H_e

$H_e=\{x \mid (x,e)=0\}$, $(e,e)>0$.

Теор. Пусть $X^n=E^n,S^n,H^n$. Тогда всякий $\gamma\in Isom(X^n)$ порождается $\le n+1, n, n+1$ отр-ми отн гиперпл-тей.

Модели Клейна K^n в шаре, Пуанкаре в шаре B^n и полупл-ве H^n_+.





$\partial H^n \simeq S^{n-1}$

$\overline{H}^n = H^n \cup \partial H^n$

$\overline{H}^n \simeq$ closed ball in $\mathbb{R}^n$

composition of an inversion and a reflection.

Upper half-space:

H^n_+ (иногда пишут U^n).

$H^2 = \{z = a+bi \mid b>0\}$

$\partial H^2 = \{b=0\} \cup \{\infty\} \simeq S^1$

$H^3 = \{(z,t) \mid t>0\}$

$\partial H^3 = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

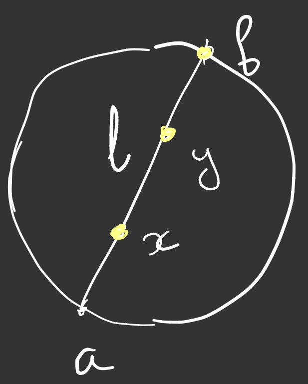
Модель Клейна в шаре

$$K^n = \{(1,\hat{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \hat{x},\hat{x}\rangle_E < 1\}$$

Идея: Посчитать проекцию в коорд.

(1) $$\cosh \rho_K(x,y) = \frac{1-\langle \hat{x},\hat{y}\rangle_E}{\sqrt{1-\langle \hat{x},\hat{x}\rangle_E}\sqrt{1-\langle \hat{y},\hat{y}\rangle_E}}$$

(2)



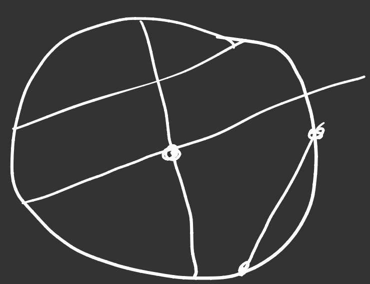
$$\rho_K(x,y) = \frac{1}{2}\left|\ln[x,y;a,b]\right|$$

где $[x,y;a,b] = \dfrac{\rho_E(x,a)}{\rho_E(x,y)} \cdot \dfrac{\rho_E(y,b)}{\rho_E(a,b)}$

двойное отношение.

Здесь $\partial l = \{a,b\}$, м. считать, что $l(+\infty)=b$, $l(-\infty)=a$.

(3) Геодезические:



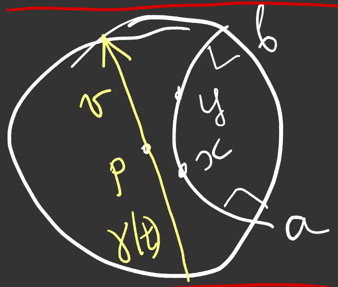
Подпр-ва – как в $\mathbb{RP}^n$

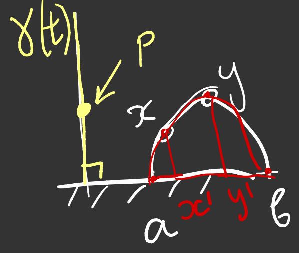
Модели Пуанкаре B^n и $H^n_+ = \mathcal{U} = H^+_n$.

Метрический тензор: $g_x = \left(\frac{2}{1-\|x\|^2}\right)^2 \cdot g^E_x$

B^n, $\cosh \rho_B(x,y) = 1 + \dfrac{2\|x-y\|^2}{(1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2)}$

H^+_n, $\cosh \rho_{H^+_n}(x,y) = 1 + \dfrac{\|x-y\|^2}{2x_n y_n}$; $g_x = \dfrac{1}{x_n^2}\cdot g^E$.





$$\rho_{conf}(x,y) = \left|\ln[x,y;a,b]\right|$$

Геодезические

B^n: $\gamma(t) = \tanh\left(\frac{t}{2}\right)\cdot v$, где $\gamma(0) = p$ – центр шара, $v \in S^{n-1} = \partial H^n$

H^n_+: $\gamma(t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, e^t)$, где $\gamma(0) = p = (x_1, \dots, x_n, 1)$.

Гиперболические углы = евклидовы углы в конф моделях H^n_+ и B^n.

Изометрии в H^n_+:

- $x \mapsto x + b$, где $b = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$
- $x \mapsto \lambda x$, где $\lambda > 0$.
- инверсии отн сфер $\perp \partial H^n_+$ (отражения).

Компактификация $\overline{H^n} = H^n \cup \partial H^n$, где $\partial H^n \approx S^{n-1}$.

Точки $x \in \partial H^n \Leftrightarrow$ классы эквивалентности геодезических лучей $\gamma: [0, +\infty) \to H^n$

Здесь $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \{\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\} < +\infty$.

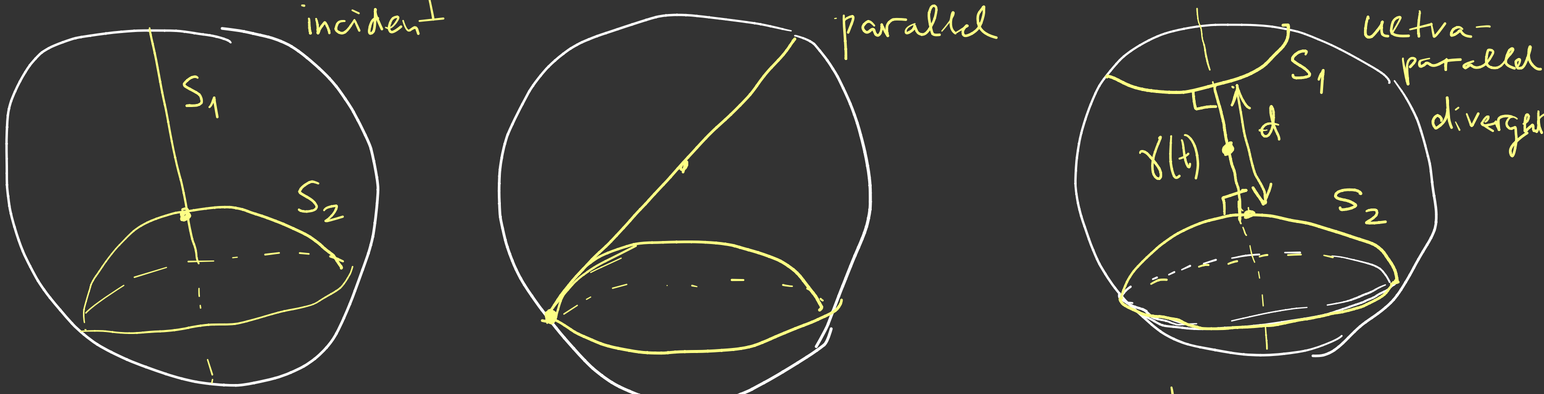
Утв. На $\overline{H^n}$ естеств. топология замкн. шара $\overline{B^n}$.

Теор. Пусть $S_1, S_2 \subset H^n$ – подпр-ва. Тогда выполнено в точности одно из след. усл-й:

(1) $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

(2) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ и $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 = \{pt\} \in \partial H^n$. Более того, $\rho(S_1, S_2) = 0$ и $\nexists \gamma : \gamma \perp S_1$ и $\gamma \perp S_2$.

(3) $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 = \emptyset$. Тогда $d = \rho(S_1, S_2) > 0$ и $\exists!$ геод. $\gamma \perp S_1, S_2$:



Теор Всякая изометрия $F: H^n \to H^n$ продолж. до $\overset{\text{homeo}}{F: \overline{H^n} \xrightarrow{\approx} \overline{H^n}}$

Эллиптические, параболические и локсодромические изометрии.
(гиперболические)

Теор. Пусть $F: H^n \to H^n$ – изометрия. Тогда выполнено ровно одно из трех условий:

1) $Fix(F)$ состоит хотя бы из одной точки $x \in H^n$. эллиптическая

Если $x = 0 \in B^n$, то $F(x) = Ax$, $A \in O_n(\mathbb{R})$.

2) $Fix(F) \cap H^n = \emptyset$, но $\exists p \in S^{n-1} = \partial H^n$: $p = Fix(F) \cap \overline{H^n}$.

Тогда $F(x,t) = (Ax + b, t)$, где $p = \infty \in \partial H^n$ в H^n_+, $t > 0$,
(параболическая) $A \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ и $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \neq 0$

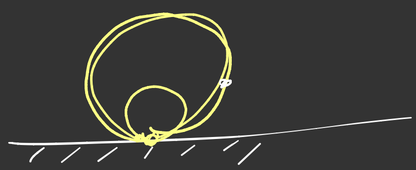
3) $Fix(F) \cap H^n = \emptyset$ и $Fix(F) \cap \partial H^n = \{p, q\}$.

локсодромический (гиперболическая) Пусть $p = 0$ и $q = +\infty$ в H^n. Тогда $F(x,t) = \lambda(Ax, t)$, где $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, $A \in O_n(\mathbb{R})$, $t > 0$.

Ось локс. эл-та – $\gamma(t)$, где $\gamma(-\infty) = p$, $\gamma(+\infty) = q$.

Эллиптические: Напр., и.с., отражения

Парабол. (повороты вокруг $p \in \partial H^n$): сохраняют орисферы.



Локсодромические (гиперб): Гиперболический сдвиг вдоль геод. γ.

$u = \gamma(-\infty)$, $v = \gamma(+\infty)$

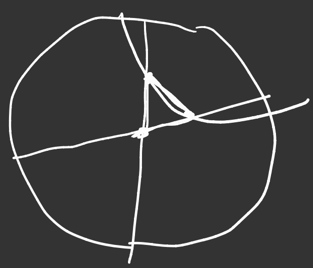
$$\mathbb{R}^{n,1} = \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle \oplus U^{\perp}, \quad U = \langle u, v \rangle$$

В этом базисе гиперб. сдвиг есть $\mathrm{diag}(e^{-\alpha}, e^{\alpha}, Id)$

(При $\lambda = 1$ в п.(3) теор получаем $F(x) = (Ax, t)$, тогда $(0,1) \in Fix(F) \cap H^n$.

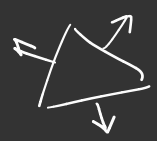
Рассм. $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) \subset H^2$.

I



$\alpha + \beta + \gamma < \pi$

II Рассм. матр Грама



$$G(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha & -\cos\beta \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\gamma \\ -\cos\beta & -\cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$G \sim (2,1)$.

$$\det G \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma > \pi \\ = 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi \\ < 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma < \pi \end{cases} \Leftarrow \left\{ \det G = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \right.$$