Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович

(Сколтех & МФТИ)

Лекция 2.

I Введение (было)

Общая картина: что изучаем?

$$\underset{\text{дискретная группа}}{\Gamma} \overset{\text{properly discontinuously}}{\curvearrowright} \underset{\substack{\text{Riemannian manifold} \\ \text{стягиваемое} \\ (\pi_1(X)=0)}}{X} = G/K$$

, где $G = \mathrm{Isom}(X)$ — группа Ли;

$K = G_{x_0}$ — максимальная компактная подгруппа;

$\Gamma < G$ — дискретная подгруппа.

Если Γ — свободна от кручения, то $\boxed{M = X/\Gamma = \Gamma \backslash G/K}$

является римановым многообразием, причем $\pi_1(M) = \Gamma$,

а иначе $\mathcal{O} = X/\Gamma$ — орбифолд (Riemannian orbifold).

Основные пространства: $X = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ — пространства постоянной секционной кривизны (гиперболическое)

пр-во Евклида, сфера, пр-во Лобачевского

II Топология (было)

III Риманова геометрия

① Гладкие многообр.

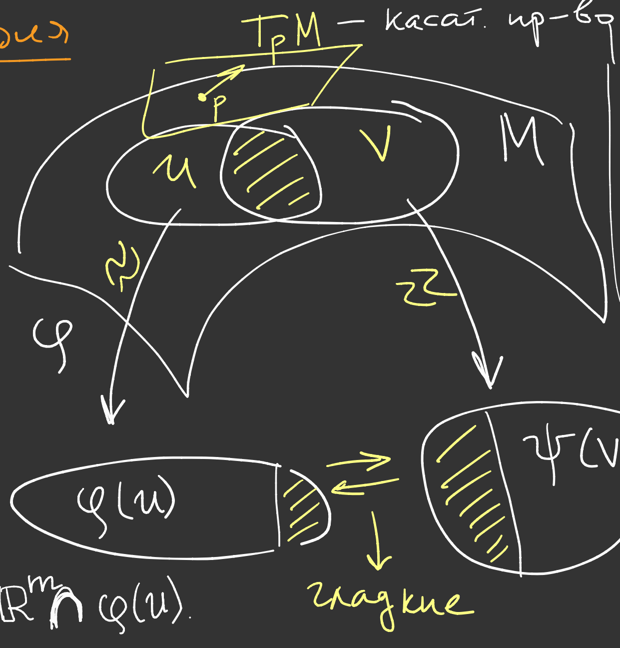
Опр. Гладкое n-мерное мног-е:

$TM = \bigcup_p T_pM$

Касат. расслоение = векторное расслоение над M.

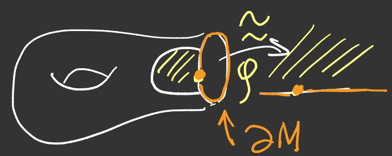
Гладкое подмн-е $M \subset N$, $m \le n$

$U \underset{\varphi}{\overset{\approx}{\to}} \mathbb{R}^n$ т.ч. $\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^m \cap \varphi(U)$.



$\mathbb{R}^n$

Мн-е с краем ∂M:



Теор. $\partial M = (n-1)$-мерное мн-е без края.

Теор. $f: M \to N$ (гладкое; $m=n$) явл. local diffeo $\iff$ $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ обратим

Опр. $f: M \to N$ (гладкое) погружение, если df_p инъекция

. . . . вложение, если $f: M \xrightarrow{\text{diffeo}} f(M)$, т.е.

$f(M) \subset N$ — гладкое подмн-е

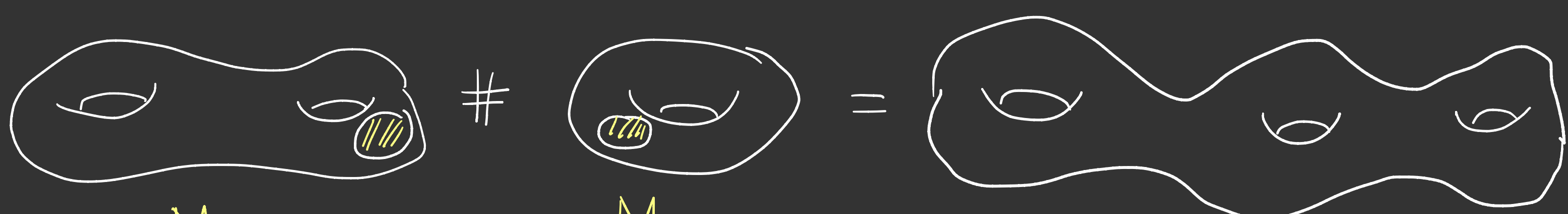
Теор. M - компакт, тогда всякое инъект. погруж. $f: M \to N$ — вложение

Теор. (об аппроксимации Уитни)

Всякое непр отобр. $f: M \to N$ гомотопично гладкому.

В частности, если $f: M \to N$ — непр. гомотопия, то $f \simeq F: M \to N$ — гладкая гомотопия.

Связная сумма



M_1 $\quad$ M_2 $\quad$ $M_1 \# M_2$ — гладкое

② Риманова геометрия

Опр. Риманово мн-ие (M,g) — гладкое мн-е M с положит. опред. метрич. тензором, т.е. $g(x,x) > 0$

$(g_{ij}) = G$

То есть имеется $\langle \cdot, \cdot \rangle > 0$ на T_pM, гладко зависящая от $p \in M$.

$g(x,y)$ — риманова метрика: $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt$; $Vol_g = \sqrt{\det g}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ (ориент?)

$\cos \angle(u,v) = \dfrac{g(u,v)}{\sqrt{g(u,u)\, g(v,v)}}$ . . .

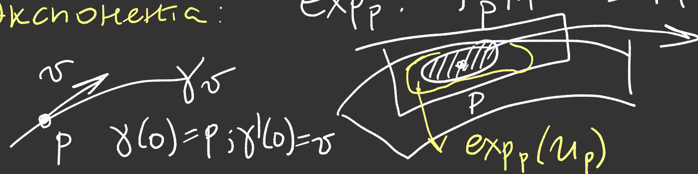
$\rho(x,y) = \inf\limits_{\gamma} L(\gamma)$, $x,y \in M$, где $\gamma: [0,1] \to M$, т.ч. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Геодезические: $\gamma : [0,1] \to M$, т.ч. $\rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = L(\gamma|_{[t_1,t_2]}) \left(\overset{\text{натур. пар.}}{=} t_2 - t_1\right)$

(max geod: $\nexists\, J \supset [0,1] : \gamma(J)$-geod)

Экспонента: $\exp_p : T_pM \to M$ $\quad \boxed{\exp_p(v) = \gamma_v(1)}$

$\to U_p \subset T_pM$



$\exp_p : U_p \to \exp_p(U_p)$ — local diffeo.

Теор. (Хопф–Ринов)

Пусть (M, g) — связное рим. мн-е. Тогда след. усл. экв.:

(1) M — полное метр. пр-во

(2) $K \subset M$ компакт $\iff$ K замкн и огр.

(3) M — геодезически полное, т.е. $\forall$ геод. $\gamma : I \to M$ расширяется до геодез. $\gamma : \mathbb{R} \to M$.

В частн., из полноты следует, что $\forall p, q \ \exists$ геод $\gamma : L(\gamma)|_{[p,q]} = \rho(p,q)$

$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$

Кривизна $\left(g \rightsquigarrow \underbrace{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x} \dots \right)}_{\text{символы Кристо.}} \right) \rightsquigarrow$ тензор Римана $R^i_{jkl} = \dots$

$\rightsquigarrow$ тензор Риччи $R_{ij} = R^k_{ikj} = \dots$ $\rightsquigarrow$ скалярная кривизна $R = g^{ij} R_{ij} = 2K \leftarrow$ гауссова кривизна $S \subset \mathbb{R}^3$

Секционная кривизна

Секционная кривизна вдоль 2-dim направления $U \subset T_pM$ = K (гауссова крив) пов-ти S, где

$$S = \exp_p \big(\underbrace{B_p}_{\text{мал. шар}} \cap U \big), \text{ т.е. } U = T_p S.$$

Пост. секц. кривизна $\equiv K$ $\forall p$ $\forall$ 2dim $U \subset T_pM$.

Евклидово пр-во $\mathbb{E}^n$: $g(x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, $K \equiv 0$.

n-мерная сфера $S^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$

$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$, $K \equiv +1$. Здесь $\boxed{\cos \rho(x,y) = (x,y)}$

Где отриц. кривизна? (Ответ: пр-во Лобачевского H^n)

Группы Ли

Группа Ли G — гладкое мн-е, снабж. гладкими операциями

$$\mu: G\times G \to G \quad \text{и} \quad i: G\to G$$
$$(g_1,g_2)\mapsto g_1\cdot g_2 \qquad g\mapsto g^{-1}.$$

<u>Примеры</u>

1) $G = GL_n(\mathbb{R}) = \{A\in Mat_n(\mathbb{R}) \mid \det(A)\neq 0\}$

$\dim G = n^2$

2) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{A\in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$

$T_E G = Lie(G) = \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X\in Mat_n(\mathbb{R}) \mid tr X = 0\}$

$\dim SL_n = n^2-1$

3) $G = O_n(\mathbb{R}) = \{A\in GL_n \mid A^TA = I\}$

$d_E(A^TA = I) \Rightarrow (dA)+(dA)^T = 0$

кососимм. матр.

$T_E G = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$

$\dim G = \frac{n^2-n}{2}$

$G = SO_n(\mathbb{R})$; $Lie(G) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$.

4) $G = SO_{n,1}(\mathbb{R}) = \{A\in SL_n(\mathbb{R}) \mid A^T I_{n,1} A = I_{n,1}\}.$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{n,1}(\mathbb{R})$

$I_{n,1} = diag(-1,1,\dots,1).$

Теор (Гаусс-Бонне)

Let M be a compact Riemannian 2-manifold with boundary ∂M. Then

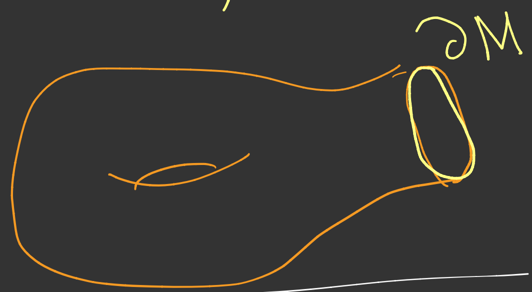
the Euler characteristic

$$\int_M K\,dA + \int_{\partial M} k\,ds = 2\pi \chi(M).$$

Gauss. Sectional curv

curv. of ∂M

$K(S_g) < 0$ при $g \geq 2$



③ Симметрические однор. пр-ва

Опр. Однор. пр-во (X, G) — это гладкое мн-е $X = G/K$, где G — группа Ли, $G \curvearrowright X$ диффеоморфизмами (транз), $K = G_o$ стабилизатор точки $o \in X$

Теор. Пусть K — компактная подгруппа Ли, тогда на $X = G/K$ сущ. G-инв. риманова метрика, т.е. $G = \mathrm{Isom}(X)$

Опр. Связное рим. мн-е X с $\mathrm{Isom}(X) = G$ наз. симметрическим, если $\forall x \in X$ $\exists!$ $s_x \in \mathrm{Isom}(X) = G$ т.что $s_x(x) = x$ и $d_x s_x = -I$

Однор. пр-во $X = G/K$ симм, если $\exists \sigma \in \mathrm{Aut}(G)$: $\sigma^2 = \mathrm{id}$ и $(G^\sigma)^0 \subset K \subset G^\sigma$

Теор. Симм. однор пр-во явл. симм. рим. мн-ем.

Примеры: (1) $E^n = (\mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R}))/O_n(\mathbb{R})$, где $\mathrm{Isom}(E^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$

(2) $S^n = O_{n+1}(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R})$, где $\mathrm{Isom}\, S^n = O_{n+1}(\mathbb{R})$

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

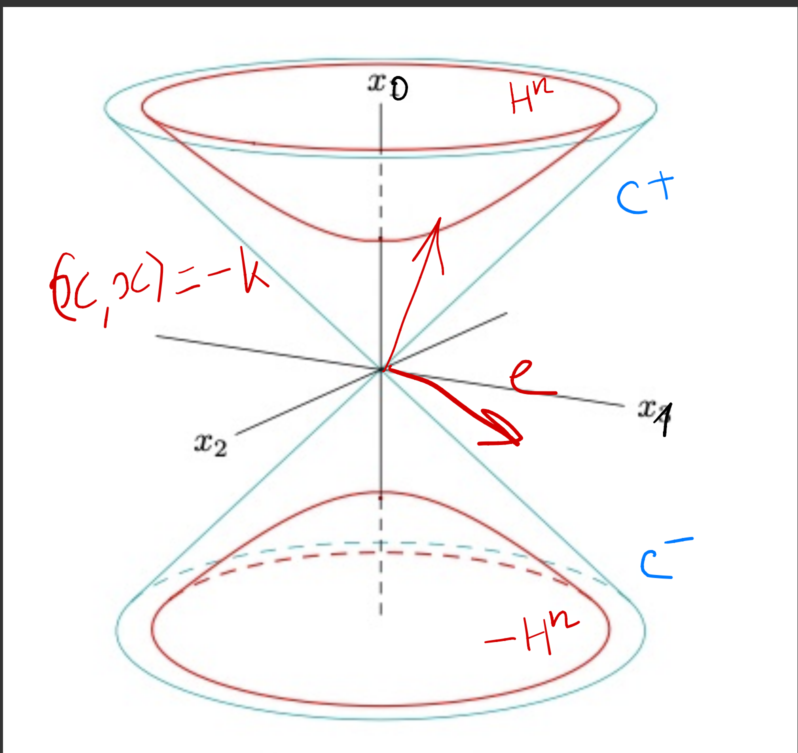
④ Гиперболическое пространство Лобачевского (векторная модель на гиперболоиде)

$\mathbb{R}^{n,1}$ — пространство Минковского, т.е. $(n+1)$-мерное пр-во

со скалярным умножением $(x,y)_{n,1} = -x_0y_0 + x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Матрица этой билин. формы $I_{n,1} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$

Тогда $O_{n,1}(\mathbb{R}) := \{ A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) \mid A^T I_{n,1} A = I_{n,1} \}$



Рассмотрим конус $C =$

$= \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x,x)_{n,1} = 0 \}$ изотропные векторы

$\| $

$C^+ \cup C^-$,

$x_0 > 0$ конус будущего; $x_0 < 0$ конус прошлого

Заметим, что конус C инвариантен под действием $O_{n,1}(\mathbb{R})$, но в нем есть движения, не меняющие местами C^+ и C^-.

Упр.1 Док-ть, что $PO_{n,1}(\mathbb{R}) = O_{n,1}(\mathbb{R}) / \{\pm I\}$ является подгруппой группы $O_{n,1}(\mathbb{R})$, состоящей из всех преобразований, оставляющих C^+ и C^- инвариантными.

Пространство Лобачевского $\quad -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1$

$$\boxed{H^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x,x)_{n,1} = -1,\ x_0 > 0 \}}$$

Метрика в H^n: $\quad \boxed{\cosh \rho(x,y) = |(x,y)_{n,1}|} = -(x,y)_{n,1}$

Подпространства в H^n суть пересечения подпр-в в $\mathbb{R}^{n,1}$ с H^n, т.е. $\ell = \underset{2\text{-dim}}{U} \cap H^n$.

Точки на абсолюте = бесконечно удалённые точки =

= точки на границе ∂H^n =

= изотропные векторы. (т.е. $\overline{H}^n = H^n \sqcup \partial H^n$)

Упр. 2. $\mathrm{Isom}(H^n) = PO_{n,1}(\mathbb{R})$

$$H^{n-1} \simeq H_e = \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x,e)_{n,1} = 0 \}$$

$(e,e)_{n,1} = 1$

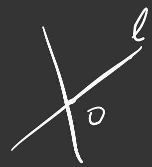
$$H_e^- = \{ x \mid (x,e) \le 0 \}$$
$$H_e^+ = \{ x \mid (x,e) \ge 0 \}$$

$R_e(x) = x - 2(e,x)e$ отражение относит. гиперпл-ти H_e

$R_e \in \mathrm{Isom}(H^n)$.

Проективная модель Кляйна пр-ва H^n в единичном шаре

Рассмотрим $\boxed{P(\mathbb{R}^{n+1}) = \{ l \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \in l \}}$



$P^n(\mathbb{R}) = P_n(\mathbb{R}) = P(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}P^n$

$[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$

Упр. $P(\mathbb{R}^{n+1})$ — гладкое n-мерное мн-е (можно построить атлас из $n+1$ карт)

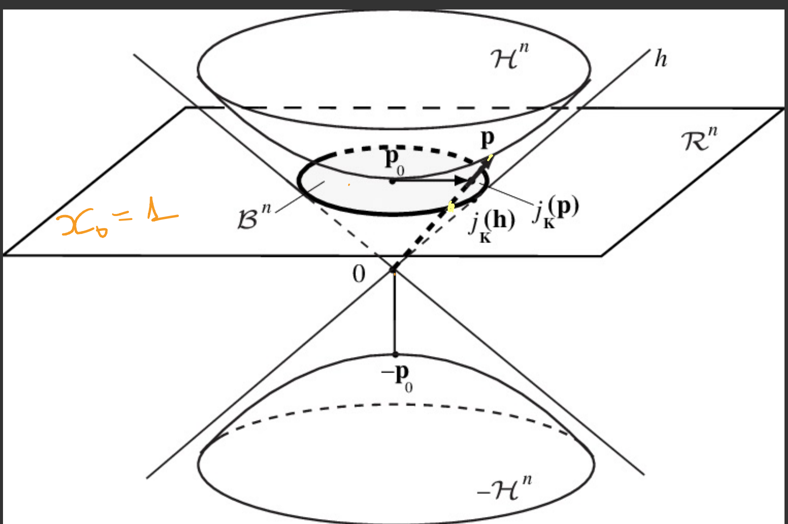
Пусть $Q_0 = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \}$

int Q_0 : $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 < 0$

$$\boxed{H^n \simeq \{ [x] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid x \in \mathrm{int}(Q_0) \}}$$

проективное определение пр-ва H^n

$\partial H^n = \{ [v] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid v \in Q_0 \}$



Ясно, что проективная модель $\simeq$ единичному шару $B^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1,\ \langle x,x \rangle_{n,1} < 0 \}$

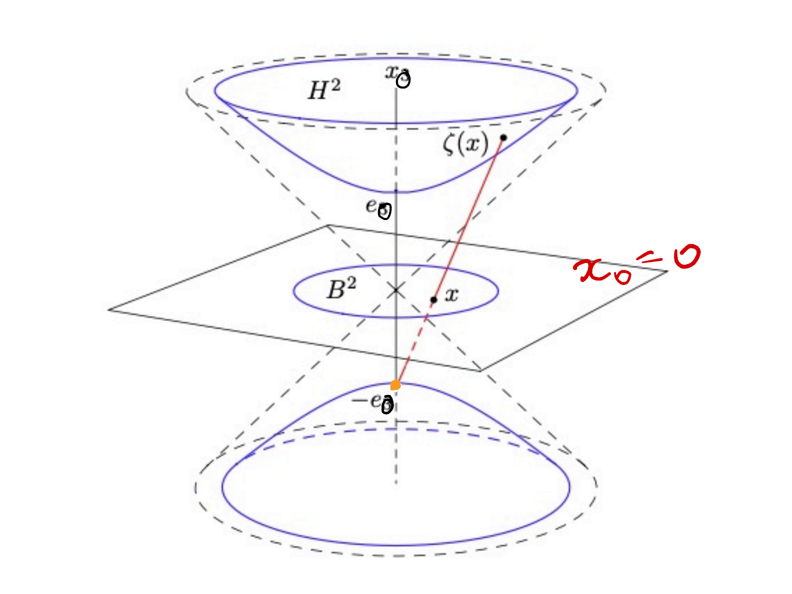
$\partial B^n = S^{n-1}$

Модель Кляйна

?

$\rho(x,y) = \frac{1}{2} \ln |[x,y;u,v]|$

Конформная модель (Пуанкаре) в шаре



Рассмотрим стереографическую проекцию $\zeta: B^n \to H^n$.

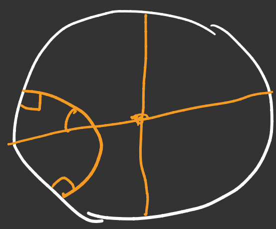
Прямые — диаметры или окружности $\perp \partial B^n = S^{n-1}$

$\partial H^n = S^{n-1}$

$\partial H^2 = S^1$

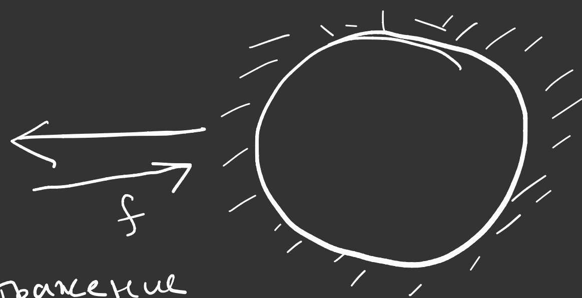
Упр

$\alpha+\beta+\gamma<\pi$



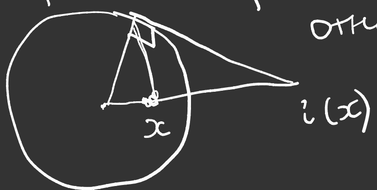
Конформная модель Пуанкаре в верхнем полупространстве.

$H_n^+ = \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\}$ — верхнее полупр-во.



$$\partial H^n_+ = \{x_n=0\}\cup\infty \approx S^{n-1}.$$

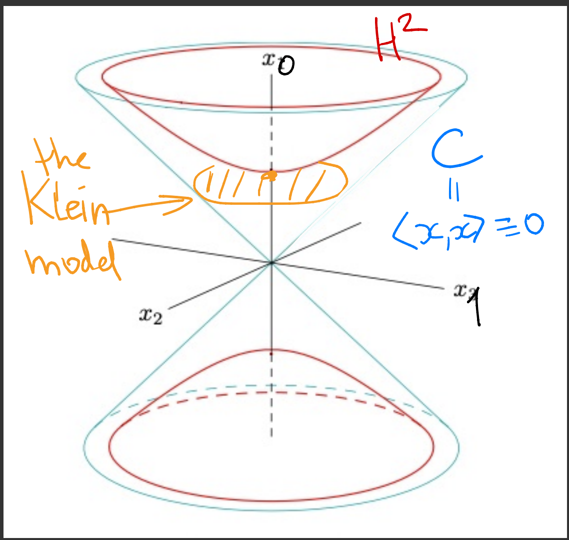
Инверсия = отражение относит окружности

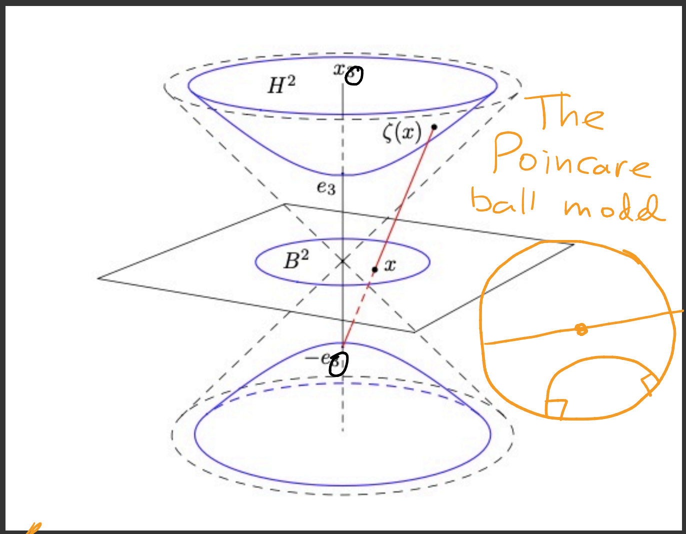


Пример

$H_2^+ = \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z>0\}$

$f(z)=\frac{z-i}{z+i}$ переводит H_2^+ в круг $B^2=\{|z|<1\}$.



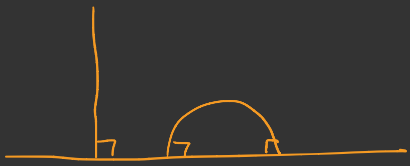


$\partial H^n \simeq S^{n-1}$

$\overline{H}^n = H^n \cup \partial H^n$

$\overline{H}^n \simeq$ closed ball in $\mathbb{R}$

Upper half-space:



composition of an inversion and a reflection.

$H^2 = \{ z = a + bi \mid b > 0 \}$

$\partial H^2 = \{ b = 0 \} \cup \{\infty\} \simeq S^1$

$H^3 = \{ (z,t) \mid t > 0 \}$

$\partial H^3 = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

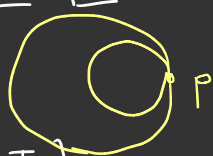
Теор.

1) $\mathrm{Isom}(H^n) \simeq PO_{n,1}(\mathbb{R}) = O_{n,1}(\mathbb{R}) / \{\pm I\}$

2) $H^n \simeq PO_{n,1}(\mathbb{R}) / O_n(\mathbb{R})$. $\left(= G/K \right)$

3) The hyperbolic sphere $\{ x \in H^n \mid \rho(x,p) = \mathrm{const} \} \overset{\text{isom}}{\simeq} S^{n-1}$ with a center $p \in H^n$

4) the horosphere (орисфера) $\{ x \in H^n \mid \langle x, p \rangle = \mathrm{const} \} \overset{\text{isom}}{\simeq} \mathbb{E}^{n-1}$ with a center $p \in \partial H^n$



5) $\mathrm{Isom}^+(H^2) \simeq PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I\}$

6) $\mathrm{Isom}^+(H^3) \simeq PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C}) / \{\pm I\}$.

Теор (Killing, Cartan, Hadamard) или (Killing, Hopf)

1890-е 1926 ?

Пусть M — односв, полное, риманово мн-е пост. секц. кривизны. Тогда
(связное)

$$M = \underset{K\equiv 0}{E^n}, \quad \underset{K\equiv 1}{S^n}, \quad \underset{K\equiv -1}{H^n}.$$