Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

Богачев Николай Владимирович

(Сколтех & МФТИ)

Лекция 10

I Введение (было)

II Топология (была)

III Риманова геометрия (была)

IV Действия групп, геометрическая теория групп, дискретные подгруппы групп Ли. (было)

V Гиперболические поверхности, многообразия, орбифолды. Группы отражений. Решетки в $\mathrm{Isom}(E^n)$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ (было)

VI Основные концепции геометрической теории групп: QI = квазиизометрии; граф Кэли; лемма Шварца–Милнора; δ-гиперболичность; группы, гиперболические по Громову.

VII Деформации (H^2) и жесткость ($H^{\geq 3}$): pants decomposition (штаны); mapping class groups; пр-ва модулей; пр-во Тайхмюллера; группа Торелли I_g и ядро Джонсона K_g; твисты Дэна (Dehn twists); curve graph и гиперб-по Громову; формулировки теорем жесткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

Комментарии к пред. лекциям:

- $\Gamma < G$ – реш. гр. Ли. Если G некомпактна, то $\Gamma \supset F_n$, $n \geq 2$, и, след., не разр.
- $M = H^n/\Gamma$ с каспом. Сечения каспа = $(n-1)$-мерный тор T^{n-1}. Таким обр., $\Gamma > \mathbb{Z}^{n-1} \Rightarrow$ НЕ гиперб. по Громову при $n \geq 3$.

VIII Теоремы жесткости Мостова, Прасада и Маргулиса. Доказательство теоремы жесткости Мостова для компактных гиперболических мног-ий.

① Теоремы жёсткости (Мостов, Прасад, Маргулис)

Теор. (Мостов '1968)

Пусть $M_1 = H^n/\Gamma_1$ и $M_2 = H^n/\Gamma_2$ – компактные гиперболические многообразия.

Тогда при $n \geq 3$

$$\underset{\pi_1(M_1)}{\Gamma_1} \cong \underset{\pi_1(M_2)}{\Gamma_2} \iff M_1 \overset{homeo}{\approx} M_2 \iff M_1 \overset{isom}{\cong} M_2 \iff \exists g \in PO_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(H^n), \text{ т.что } \Gamma_2 = g\Gamma_1 g^{-1}.$$

$$\left(\iff M_1 \overset{homotopy}{\simeq} M_2\right)$$

Теор (Прасад '1973)

— " — M_1 и M_2 – некомп. кон объема.

Теор (Margulis Superrigidity Theorem '19)

Замечание с прошлой лекции: Надо подправить.
1) $G \not\approx SL_2(\mathbb{R})\times K$
2) Mostow vs. Margulis

Пусть $G_1 \underset{\text{изогения}}{\not\approx} SO_{n,1}(\mathbb{R}) \times K$ или $SU_{n,1}(\mathbb{R}) \times K$. ($\Leftarrow rk_{\mathbb{R}} G_1 \geq 2$)

Пусть G_1, G_2 - связные п/п гр. Ли без центра и компактных множителей.

Пусть $\Gamma < G_1$ неприводим. решетка и $\varphi: \Gamma \to G_2$ –гомоморфизм, т.что $\underset{\text{замыкание по Зарисскому}}{\underline{Zd(\Gamma)}} = G_2$. Тогда φ продолж. до непр. гомоморфизма $\hat{\varphi}: G_1 \to G_2$.

(Грубо говоря, $\Gamma_j < G_j$ реш., $\varphi: \Gamma_1 \xrightarrow[\text{гом}]{} \Gamma_2 \Rightarrow \exists \hat{\varphi}: G_1 \to G_2$)

Опр. Решетка $\Gamma < G$ неприв., если ΓN всюду плотна в G° для всякой некомп., замкн. норм. подгр $N \triangleleft G$.

Теор (Borel's Density Theorem).

[вещ. алгебр. группе $G \subset GL_N(\mathbb{R})$].

Пусть $\Gamma < G$ — решетка в п/п гр. Ли без комп. множ. Тогда $Zd(\Gamma) = G$

т.е. если $p(x_{11}, \ldots, x_{nn}) \in \mathbb{R}[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$ (многочлены на $Mat_N(\mathbb{R})$)

и $p(\Gamma) = 0$, то и $p(G) = 0$.

Теор. (Strong Mostow Rigidity)

Пусть G_1, G_2 — связные п/п гр. Ли без центра и комп. множ.,

$G_1 \not\cong PSL_2(\mathbb{R})$, $\Gamma_j < G_j$ — неприв. решетки. Тогда

всякий изоморфизм $\varphi : \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2$ продолж. до непр. изом. $\hat{\varphi} : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$.

② План доказательства теор. жесткости Мостова & Part I

Теор. (Мостов '1968)

Пусть $M_1 = \mathbb{H}^n / \Gamma_1$ и $M_2 = \mathbb{H}^n / \Gamma_2$ — компактные гиперболические многообразия.

Тогда при $n \geqslant 3$

$$\underset{(A)}{\Gamma_1 \cong \Gamma_2} \iff \underset{(B)}{M_1 \overset{\text{homeo}}{\approx} M_2} \iff \underset{(C)}{M_1 \overset{\text{isom}}{\cong} M_2} \iff \underset{(D)}{\exists g \in PO_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)}, \text{ т.что } \Gamma_2 = g \Gamma_1 g^{-1}.$$

$\Gamma_1 = \pi_1(M_1)$, $\Gamma_2 = \pi_1(M_2)$

$$\underset{(E)}{\left(\iff M_1 \overset{\text{homotopy}}{\simeq} M_2\right)}$$

Очевидно: $D \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow E \Rightarrow A$

Crazy (?) Idea: $\underbrace{A \Rightarrow E \Rightarrow B \Rightarrow C}_{} \Rightarrow D$. easy!

4 КИТА: топология, геометрия, анализ, динамика = эргодическая теория

Схема

$$\underset{(A)}{\varphi : \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2} \overset{①}{\longmapsto} \underset{(E)}{M_1 \overset{f\text{-smooth homotopy}}{\simeq} M_2} \overset{②}{\longmapsto} \underset{(B)}{\tilde{f} : \mathbb{H}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^n} \text{ — smooth homotopy — pseudo-isometry} \overset{③!}{\longmapsto} \partial\tilde{f} : \partial\mathbb{H}^n \xrightarrow{\approx} \partial\mathbb{H}^n \text{ — homo boundary map}$$

$$\overset{④}{\longmapsto} \partial\tilde{f} : \underset{S^{n-1}}{\partial\mathbb{H}^n} \to \underset{S^{n-1}}{\partial\mathbb{H}^n} \text{ — K-quasi-conf} \longmapsto \partial\tilde{f} \text{ дифф. п.в.} \longmapsto d(\partial\tilde{f}) \text{ — K-quasi conf.}$$

Part I: $\bigstar$ $n=2$ не работ. брать $d(\partial\tilde{f})$

$$\overset{⑤}{\longmapsto} \Gamma \curvearrowright S^{n-1} \text{ эргодично}$$

и либо Howe-Moore thrm,

либо теор. Хопфа-Аносова про эрг. геод. потоков на гиперб. мн-ях

$$\longmapsto K \equiv 1 \text{ п.в.} \overset{⑥}{\longmapsto} d(\partial\tilde{f}) \text{ и } \partial\tilde{f} \in \mathrm{Conf} \Longrightarrow \underset{(C)}{\tilde{f} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)}$$

Лемма 1) $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathrm{Conf}(\partial \mathbb{H}^n) := \mathrm{Conf}(S^{n-1})$.

2) $QI(\mathbb{H}^n) = Q\mathrm{Conf}(S^{n-1})$.

Опр а) Пусть (X,ρ) – метр. пр-во. Геодезическая в X = $\gamma : [a,b] \xhookrightarrow[\text{влож.}]{\text{изом!}} X$

б) Квазигеодезическая = $\tilde{\gamma} : [a,b] \hookrightarrow X$ – QI-вложение.

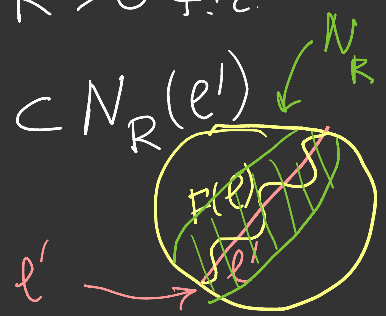
(Following Martelli "Intro to Geom Topol")

Теор. Псевдо-изом $F : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ продолжается до $F : \overline{\mathbb{H}}^n \xrightarrow[\sim]{\text{homeo}} \overline{\mathbb{H}}^n$

Лемма 5 (Morse–Mostow Lemma)

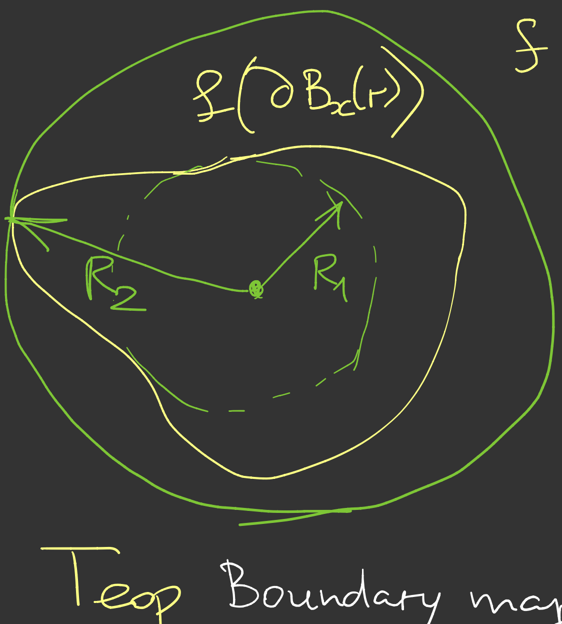
Пусть $F : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ – псевдо/квази-изом (C_1, C_2). Тогда $\exists\, R \overset{\text{const}(C_1,C_2)}{>} 0$ т.ч. $\forall$ геод. $\ell \subset \mathbb{H}^n$ $\exists!$ геод. ℓ' : квазигеод. $F(\ell) \subset N_R(\ell')$

(геодезическое выпрямление! квази-геодезической.)



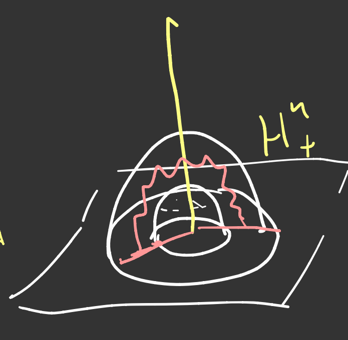
Лемма 6 Пусть F – псевдо-изом. Тогда $\exists\, R > 0$:

$\forall\, \ell$ и гиперпл-ти $H \perp \ell$ образ $F(H)$ при проекции на $\underset{\text{геод. выпр.}}{\ell' \sim F(\ell)}$ попадает на дугу длины $< R$.



f – quasi-conf, если $\exists\, C > 0$

$$\lim_{r \to 0} \frac{R_2}{R_1} < C.$$



Теор. Boundary map $\partial \tilde{f} \doteq \tilde{f}\big|_{\partial \mathbb{H}^n} \in Q\mathrm{Conf}(S^{n-1})$

Теор. Пусть $n \geq 3$. Тогда quasi-conf homeo $F: S^{n-1} \to S^{n-1}$ явл. дифф. п.в. Более того, d_xF равн огр., т.е. $\exists\, \lambda > 1: \forall$ п.в. $x \in S^{n-1}$ и $\forall v \in T_x S^{n-1}$
$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{\|d_xF(v)\|}{\|v\|} \leq \lambda$$

Замечание При $n=2$ не выполнено усл-е про d_xF.

А именно, $\exists$ гомеоморфизмы S^1 : $d_xF \equiv 0$.

Теор. (без док-ва).

1) Пусть $F \in Homeo(S^{n-1}) \cap C(S^{n-1})$. Тогда

$$F \in K\text{-}QConf(S^{n-1}) \iff dF \in K\text{-}QConf(TS^{n-1}).$$

2) $F \in QConf(S^{n-1})$ и $dF \in Conf(TS^{n-1}) \Rightarrow F \in Conf(S^{n-1})$.

3 Part II: dynamics and ergodic theory

Ссылка:
Богачев В.И.
"Основы теории меры, Vol 2"

Опр. Пусть $(X, \underset{\sigma\text{-алгебра}}{\underbrace{\mathcal{A}}}, \mu)$ — a measure space.

Тогда измер. отобр. $T: X \to X$ наз. сохр. меру, если $\mu \circ T^{-1} = \mu$ (т.е. $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$).

Такое отобр. назыв. эргодическим, если T-инв подмн-ва либо меры 0, либо полной меры. То есть:

$$T(E) = E \Rightarrow \mu(E) = 0 \text{ или } \mu(X \setminus E) = 0. \quad \forall E \subset X.$$

Предл. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пр-во с кон. мерой (вероятн).

Тогда $T: X \to X$ эргодично $\iff \forall$ T-инв $f \in L^1(X)$ верно $f \equiv const$.

Теорема (Birkhoff - Khinchin Ergodic Theorem)

(1) Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - вероятн пр-во и $T: X \to X$ - сохр-меру отобр.

Пусть f - μ-изм. функция. Тогда для μ-п.в. $x \in X$

$\exists$ предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \overline{f}(x)$.

Более того, $\overline{f} \in L^1(\mu)$ и $\int\limits_X f\,d\mu = \int\limits_X \overline{f}\,d\mu$.

(2) Если к тому же T - эргодическое, то

$\overline{f} \equiv c$ и $\int\limits_X \overline{f}\,d\mu = c = \int\limits_X f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$.

Опр. Геодезические потоки и мера Лиувилля

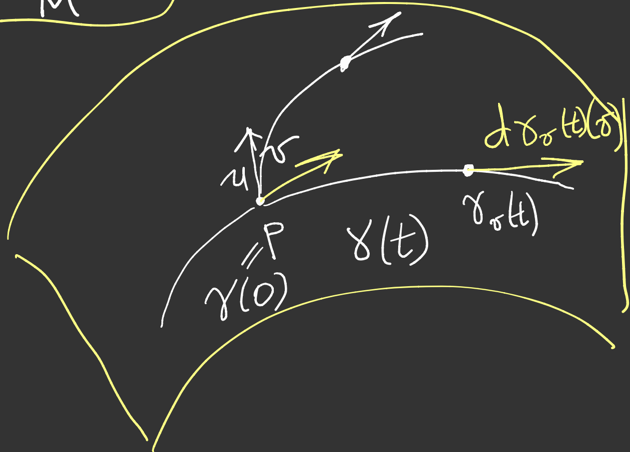
1) Пусть M - хорошее (полное) риманово мн-е и пусть T^1M. Тогда $\forall v \in T^1M$

γ_v - кривая со скор v. $\boxed{\text{Геодез. поток на } T^1M}$ - 1-парамет. семейство

$g_t: T^1M \to T^1M$

$(p, v) \xmapsto{g_t} (\gamma_v(t); d\gamma_v(t)(v))$

где $\gamma_v(0) = p$



2) Мера Лиувилля на T^1M, где $Vol(M) < +\infty$,

это $d\omega = dVol_M\, d\theta$, где $d\theta$ - мера Лебега на T^1_pM единичной массы

$d\omega = dvol_M \wedge d\theta$ и $Vol(M) = 1$.

Теор (Св-ва меры Лиувилля)

Теор Лиувилля, см. Do Carmo "Riemannian geometry"

a) $d\omega$ – вероятн. мера на T^1M.

b) Геодезические потоки сохраняют меру $d\omega$.

Док-во: (для H^n и $M = H^n/\Gamma$). a) Очевидно

b) $\tau_\gamma(t)$ – изометрия в H^n, $d\gamma_v(t)$ – невырожд. оператор. $\Rightarrow$ $\boxed{}$
(гиперб. сдвиг)

Для H^n/Γ пользуемся тем, что $H^n \to H^n/\Gamma$ – лок. изом $\boxed{}$

④ Part II: Proof 1

Теор. (Хопф '1940, для $K \equiv -1$, Аносов '1967 для $K<0$)

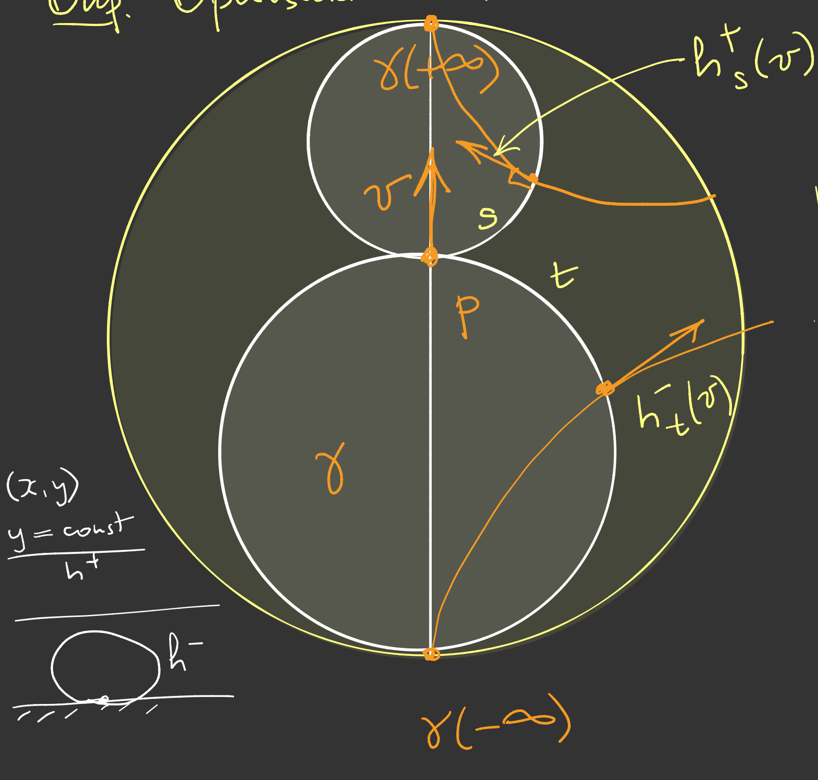
Пусть $M = H^n/\Gamma$ – полное связное гиперб мн-ие конечн. объема.

Тогда геодез. поток на T^1M явл эргодическим по мере Лиувилля.

Док-во: (для $n=2$) В этом случае $\Gamma < \mathrm{Isom}^+(H^2) = PSL_2(\mathbb{R})$

Пов-ть $M = H^2/\Gamma$ lattice по мере Хаара

Опр. Орициклические потоки



Более того, эта мера Хаара на группе Ли $PSL_2(\mathbb{R})$ индуцирует единств. лок-кон. меру на $T^1(M) \simeq \Gamma \backslash PSL_2(\mathbb{R})$

Тогда геодезический поток на $T^1(H^2/\Gamma)$ соотв. однопар. подгр:

$$g^t(\Gamma v) = \Gamma v \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

А здесь имеем:

$h_s^+(\Gamma v) = \Gamma v \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$h_t^-(\Gamma v) = \Gamma u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

Тут прикол в том, что $T^1(H^2) \simeq PSL_2(\mathbb{R})$ и g_t на T^1H^2:

$g^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$

Нетрудно убедиться, что $\begin{cases} g_s h_t^+ g_{-s} = h^+_{te^{-s}} \xrightarrow{s\to+\infty} Id \\ g_{-s} h^-_t g_s = h^-_{te^s} \xrightarrow{s\to-\infty} Id \end{cases}$

В частн., $g_s h_t^+ = h^+_{te^{-s}} \circ g_s$

Остается показать, что если всякая g_t-инвар. функция $f \in L^2$ будет также h_t^+- и h_t^--инв, то победа, поскольку

$PSL_2(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \right\rangle$ и при этом

всякая $PSL_2(\mathbb{R})$-инв функция на $PSL_2(\mathbb{R})/_\Gamma$ есть const.

① Итак, если $f \in L^2$, то $f \circ h^+_{te^{-s}} \xrightarrow[L^2]{s\to+\infty} f$. Действ., можно аппроксимировать фун-ми с компактным supp + использовать тот факт, что $h^+ \in Isom(H^2)$.

② Если $f \in L^2$ и $f \circ g_s = f$, то $f \circ h_t^- = f$ и $f \circ h_t^+ = f$.

Действительно, $\| f \circ h_t^+ - f \|_{L^2} = \| f \circ g_s \circ h_t^+ - f \|_{L^2} =$

$= \| f \circ h^+_{te^{-s}} \circ g_s - f g_s \|_{L^2} = \| f \circ g_s \circ h_t^+ - f \circ g_s \|_{L^2} \xrightarrow{s\to+\infty} 0$

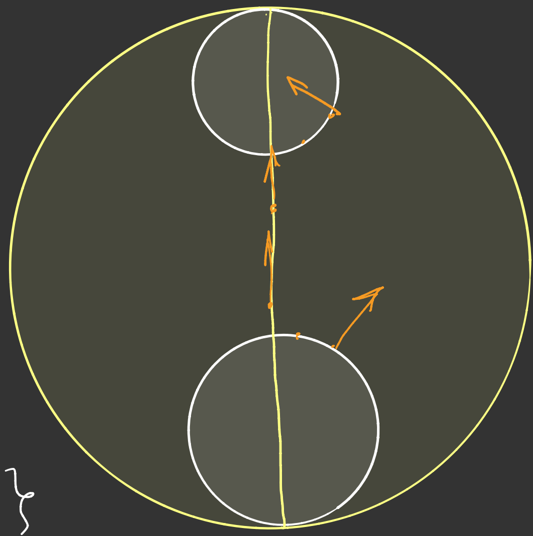
Причем,

$\rho(\underline{g_s} h_t^+(v), \underline{g_s(v)}) = \rho(h^+_{te^{-s}}(v) g_s(v), g_s(v)) = te^{-s} \to 0$

$\int | f g_s h_t^+(u) - f \circ g_s(u) |^2 du \longrightarrow 0 \implies f \circ h_t^+ = f.$

$n\geq 2$ (Идея).

(Много вопросов; док-во сложное!)



$$W^+(u) = \{g_s h_t^+(u) \mid s,t\in\mathbb{R}\}$$

$$W^-(v) = \{g_s h_t^-(v) \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Или

$$W^+(u) = \{v \mid \rho(g_t(u), g_t(v)) \xrightarrow{t\to+\infty} 0\}$$

$$W^-(u) = \{v \mid \rho(g_t(u),g_t(v)) \xrightarrow{t\to-\infty} 0\}.$$

Пусть $f\in L^1(T^1M)$ или $L^2(T^1M)$

Рассм. $f^+(v) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(g_t(v))\,dt$; $f^-(v) = \lim\limits_{T} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(g_t(v))\,dt$

Можно доказать, что $f^+(v)=f^-(v)$. Надо д-ть $\forall f\in L^1$ $f^+\equiv \mathrm{const}$ п.в.

М.сч., что $\mathrm{supp}(f)$ — компакт. Далее,

<u>шаг 1</u>: f^+ и f^- постоянны вдоль h^+ и h^-, т.е. $f^+(v) = f^+(h_s^+(v))$.

Поскольку $f^+(g_t v) = f^+(v)$, то $f^+\equiv \mathrm{const}$ на $W^+(u)$.

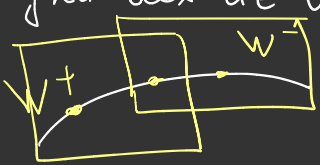
<u>шаг 2</u>: Пусть $\omega(U)$ - мера Лиувилля мн-ва $U\subset T^1M$.

Тогда $\omega(\{h_s^+ g_t h_a^-(u) \mid s,t,a\in\mathbb{R}\}) =$

$= \omega(\{h_a^- g_t h_s^+(v) \mid s,t,a \in\mathbb{R}\}) = 1$.

Т.е. имеем $(s,t,a)\mapsto h_s^+ g_t h_a^-(u)\in T^1M$ с мерой $ds\,dt\,da \sim d\omega$

Иными словами, $\exists U\subset\mathbb{R}$ т.ч. $\mu(\mathbb{R}\setminus U)=0$ и $f^+(h_u^-(v))$ и $f^-(h_u^+(v))$ сущ. для всех $u\in U$.



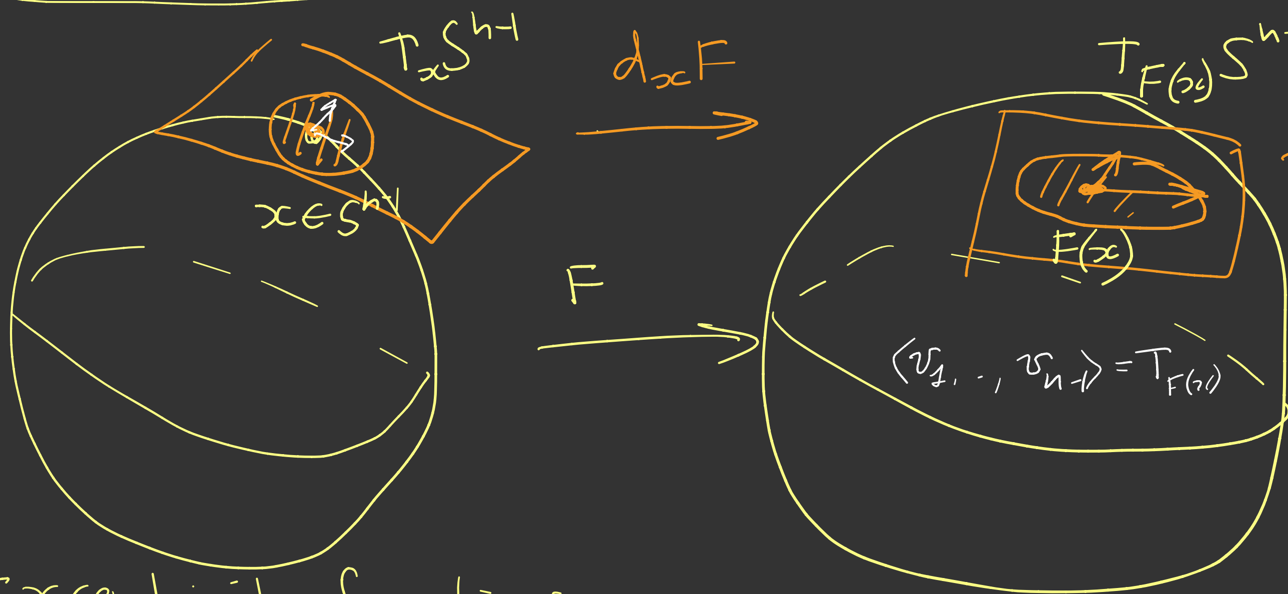
Осталось заметить, что для всех $u\in U$:

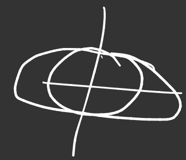
$f^+\equiv \mathrm{const}$ на $W^+(h_u^-(v))$ и $\exists$ на $W^-(h_u^+(v))$

$f^-\equiv \mathrm{const}$ на $W^-(h_u^+(v))$ и $\exists$ на $W^+(h_u^-(v))$ и $\forall u_1,u_2\in U$:

$$f^+(h^-_{u_2}(v)) = f^-(h^-_{u_2}(v)) \underset{f^-\text{ const вдоль } h^-}{=} f^-(h^-_{u_1}(v)) = f^+(h^-_{u_1}(v)) \Rightarrow f^+\equiv \mathrm{const} \text{ п.в.} \quad ☒$$

Теор.А. Действие $\Gamma_1 \curvearrowright S^{n-1}\times S^{n-1}$ эргодично, т.е. $\Gamma_1 \curvearrowright S^{n-1}$ эргодично.





Excentricity functions

$$\boxed{e_F(x) = \max_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,\dots,n-1}} \left\{ \frac{\|v_i(F(x))\|}{\|v_j(F(x))\|} \right\}}$$

$\forall$ п.в. $x\in S^{n-1}$.

Нам d_xF тогда $e_F(x)$ QConf.

Из предыдущей теор. след., что $e_F \equiv \mathrm{const}$ п.в.

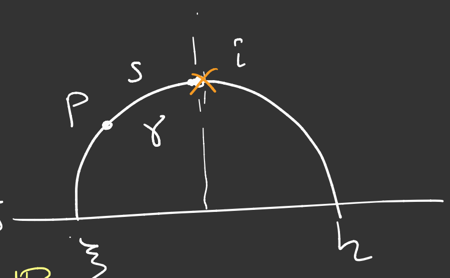
Лемма На самом деле, $e_F\equiv 1$ п.в. и, значит, dF – conf.

Теор B Если $F: S^{n-1}\to S^{n-1} \in QConf$ и $dF\in Conf \Rightarrow F\in Conf$.
(без док-ва).

Док-во Теор А.

Пусть $v\in T^1_pH^n$, $\gamma_v=\gamma$, $\gamma(-\infty)=\xi$, $\gamma(+\infty)=\eta$

и $\rho(p,i)=s$. т.е. $v\mapsto(\xi,\eta,s)$.



$$T^1H^n \to \big((S^{n-1}\times S^{n-1})\setminus D\big)\times\mathbb{R}, \quad D = \{(\xi,\xi)\}\subset S_1^{n-1}$$

$\exists\ \rho(\xi,\eta)>0$: $d\omega = \rho(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta\, ds$. Пусть A – Γ_1-инв., $A\subset S^{n-1}\times S^{n-1}$.

Пусть $B=A\times\mathbb{R}$. Тогда B – g_t инв на H^n, B – Γ_1 инв и $g_t|_{M_1} = \mathrm{Proj}_{M_1} g_t|_{H^n}$

$(g_t\circ d\gamma = d\gamma\circ g_t)$. Таким обр., B/Γ $= g_t|_{M_1}$-инв. По теор. Хопфа-Аносова,

$\omega(B/\Gamma)=0$ или $\omega(M_1\setminus(B/\Gamma))=0$. Если $\omega(B/\Gamma)=0$, то

$$0 = \omega_{H^n}(B) = \int_B d\omega = \int_B \rho(\xi,h)\, d\xi\, dh\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A \rho(\xi,h)\, d\xi\, dh = 0 \Rightarrow \mu(A)=0. \qquad \blacksquare$$

Док-во Леммы: Основано на том, что не существует Γ_1-инв измеримого реперного/базисного поля на $T_x S^{n-1}$.
frame field

Если $e_F \equiv c > 1$ п.в., то $\exists$ поле $\{(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x))\}$ на $T_x S^{n-1}$

Заметим, что $F\circ\gamma = \varphi(\gamma)\circ F$ и $v_i(\gamma x) = d\gamma(v_i(x))$

Пусть $\|v_1(x)\| < \dots < \|v_{n-1}(x)\|$ $\forall$ п.в. $x \in S^{n-1}$. (что если $\|v_2\| = \|v_3\|$?)

Тогда это поле Γ_1-инв. и измеримо.

Пусть теперь сущ Γ_1-инв поле на TS^{n-1}: $(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x))$

Идея: взять $x \neq -y$ и парр. перенос вдоль геод

$P_{yx}: T_y S^{n-1} \to T_x S^{n-1}$. Опр-м ф-ции $\varphi_{i,j}: T_p S^{n-1} \times T_p S^{n-1} \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \langle v_i(x), P_{yx}(v_j(y))\rangle$

Далее, $\Gamma \overset{\text{эрг}}{\curvearrowright} S^{n-1}\times S^{n-1} \Rightarrow \varphi_{ij} \equiv const$ п.в. $\Rightarrow v_i(x)$ опред $\forall$ п.в. $x \in S^{n-1}$

Пусть $S^2 \subset S^{n-1}$ и $S^2 \ni x,y,z$: $\mathrm{Proj}_{T_xS^2}(v_j(x)) \neq 0$ для некот $j \le n-1$.

Здесь $\mathrm{Proj}_{T_xS^2}: T_xS^{n-1} \to T_xS^2$, где $P_{xy}\,\mathrm{Proj}_{T_xS^2} = \mathrm{Proj}_{T_yS^2}\circ P_{xy}$

Тогда $\mathrm{Proj}_{T_xS^2}(v_j(x)) = \mathrm{Proj}_{T_xS^2}\left(P_{zx}\circ P_{yz}\circ P_{xy}(v_j(x))\right) =$

$= P_{zx}\circ P_{yz}\circ P_{xy}\circ\left(\mathrm{Proj}_{T_xS^2}(v_j(x))\right)$

Причем (x,y,z) — Δк на S^2. ~~В силу Гаусса–Бонне~~ невозм

Пусть $\varphi = P_{zx}P_{yz}P_{xy}$. $\boxed{\text{Тогда } \angle(\varphi(v), v) = S_{\Delta(x,y,z)}}$ $\blacksquare$

УРА

$3\pi/2 - \pi = \pi$

④ Part II: Proof 2

Теор. (Howe–Moore Ergodicity theorem)

1) Пусть $H, L < G$ — лок. комп. Тогда

$$H \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/L \iff L \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/H \iff H \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G \underset{\text{эрг.}}{\curvearrowleft} L.$$

2) Если $\Gamma < G$ — н/н гр. Ли, то $H \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/\Gamma$ [На G/Γ сущ. G-инв. вероятн. мера (Хаар)]
решетка.

Доказательство основано на Howe-Moore vanishing thm; разложении Картана $G = KA^+K$ $(= KP)$

Для $G = SL_2(\mathbb{R})$ похоже на т. Хопфа.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$

$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}^+ = \mathrm{Lie}(A^+)$

Разл. Картана для $G = PO_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(H^n)$.

$K = O_n(\mathbb{R}) < PO_{n,1}(\mathbb{R})$; K — макс. комп. подгр.

$K = G_0$. Тогда $A^+ =$ 1-dim подгр. диаг. матриц = группа паралл. переносов вдоль γ.

Hint $H^n = G/K$

① $A^+ \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/\Gamma \overset{\text{по т. H-M}}{\iff}$ ② $\Gamma \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/A^+$

Надо использовать тот факт, что $\Gamma_1, \Gamma_2 \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} S^{n-1}$ и $\Gamma_1, \Gamma_2 \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} Gr_k(TS^{n-1})$?

$(c > 1 \Rightarrow 1 \leq k < n-1)$

Заметим, что $S^{n-1} = \partial_\infty H^n = G/P$

$G \cong \mathrm{Conf}(S^{n-1})$; $G_\infty = \{(x,t) \mapsto (Ax+b, t) \mid A \in O_{n-1}(\mathbb{R})\}$, $(x,t) \in H^n$, $t > 0$

$\Rightarrow G_\infty = \mathrm{Isom}(E^{n-1}) \Rightarrow$

H^n_+ | $S^{n-1} = PO_{n,1}(\mathbb{R}) / \mathrm{Isom}(E^{n-1})$.

Т.е $S^{n-1} = G/P$, где $G = \mathrm{Isom}(H^n) = PO_{n,1}(\mathbb{R})$

$P = \mathrm{Isom}(E^{n-1}) = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes O_{n-1}(\mathbb{R})$.

Далее, $Gr_k(T^1 S^{n-1}) = G/H_k$, где $A^+ < H_k < P$.

Здесь $H_k = G_U$, где $U < \{t=0\}$
k-мерная плоскость

Отсюда имеем:

① $A^+ \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/\Gamma \overset{\text{по т. Н-М}}{\Longleftrightarrow}$ ② $\Gamma \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} G/A^+$

? ③

Поскольку $\Gamma_1, \Gamma_2 \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} S^{n-1}$, то $\Gamma_1, \Gamma_2 \underset{\text{эрг}}{\curvearrowright} Gr_k(T^1 S^{n-1})$.

Но $e_F(x)$ – Γ_j-инв.; $Gr_k(TS^{n-1})$ – есть Γ_1-инв $\Rightarrow$ в силу эргодичности либо все, либо ничего ($k=0$ или $k=n-1$) противоречие!?