Геометрия, арифметика и динамика дискретных групп.

mail to:
nvbogach@mail.ru

Богачев Николай Владимирович
(Сколтех & МФТИ)

I Введение

1 Общая картина: что изучаем?

$$\underset{\text{дискретная группа}}{\Gamma} \overset{\text{properly discontinuously}}{\curvearrowright} \underset{\substack{\text{Riemannian manifold} \\ \text{стягиваемое} \\ (\pi_1(X)=0)}}{X} = G/K,$$

где $G = \mathrm{Isom}(X)$ — группа Ли;

$K = G_{x_0}$ — максимальная компактная подгруппа;

$\Gamma < G$ — дискретная подгруппа.

Если Γ — свободна от кручения, то $\boxed{M = X/\Gamma = \Gamma\backslash G/K}$ является римановым многообразием, причем $\pi_1(M) = \Gamma$, а иначе $\mathcal{O} = X/\Gamma$ — орбифолд (Riemannian orbifold).

Основные пространства: $X = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ — пространства постоянной секционной кривизны (гиперболическое)

пр-во Евклида, сфера, пр-во Лобачевского

2 Области математики:

- геометрия (риманова геометрия)
- топология (алгебраическая, комбинаторная, дифференциальная)
- геометрическая теория групп (геометрия действия, фундаментальные области, ..)
- дискретные подгруппы групп Ли ($\mathbb{Z}^n$, $SL_n(\mathbb{Z})$, $PO_{n,1}(\mathbb{Z})$, $PSL_2(\mathbb{Z})$, ...)
- арифметические дискретные группы ($PO(f, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$, где $f(x) = -\sqrt{2}x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$) теория чисел, квадратичные формы, кватернионные алгебры.
- динамические методы, эргодическая теория (эргодичность потоков на гиперболических мн-ях и теор. жесткости Мостова)

— Теория Э.Б. Винберга гиперболических групп отражений
(геометрия, арифметика, комбинаторика, многогранники Коксетера)

II Топология

① Топологические многообразия и конструкции

Опр Топологич. многообразие — это хаусд. топологическое пр-во со счетной базой, в котором каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной открытому шару в $\mathbb{E}^n$.

(Гомеоморфизм: $f: X \to Y$ — непр, биективное и f^{-1} непр)

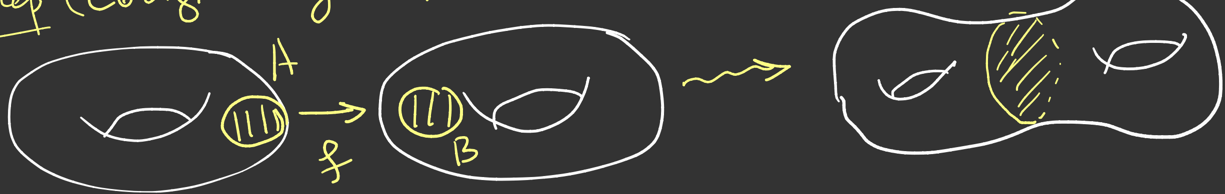
(Обознач.: $X \approx Y$)

Топологические конструкции $X \sqcup Y$; $X \times Y$; $X/_\sim$ — мн-во классов эквивалентности $= \{[x] \mid x \in U\}$,
$U \subset X/_\sim$ открыто, если открыто в X
$U^* = \{x \in [u] \mid [u] \in U\}$

Если $A \subset X$, то $X/A := X/_\sim$, где $x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A$.

Пусть $f: X \to Y$ — непр. Тогда $X \cup_f Y = X \sqcup Y/_\sim$,
$A \subset X$, $B \subset Y$; $A \leftrightarrow B$ замкнутые
(склеивание по отобр)
где $x \sim y$, если $x, y \in \{b \sqcup f^{-1}(b) \mid b \in B\}$

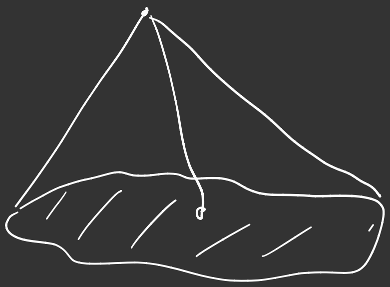
Пример (Связная сумма) $X \# Y$



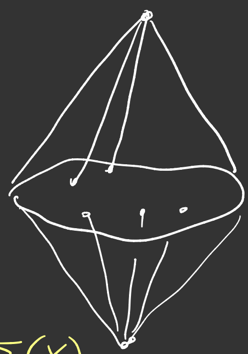
Конус $C(X) = (X \times [0,1])/_\sim$, где $(x,1) \sim (y,1)\ \forall x, y \in X$

Надстройка $\Sigma(X) = (X \times [-1,1])/_\sim$, где $(x,1) \sim (y,1)$ и $(x,-1) \sim (y,-1)$

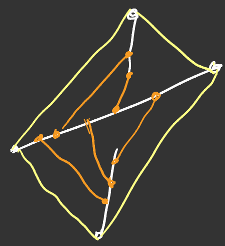
Джойн $X * Y = \dfrac{(X \times [-1,1] \times Y)}{\sim}$, где $(x_1,1,y) \sim (x_2,1,y)$ и $(x,-1,y_1) \sim (x,-1,y_2)$



$C(X)$



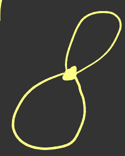
$\Sigma(X)$



$[0,1] * [0,1] =$ Тетраэдр

Букет:

$S^1 \vee S^1$



Симплициальный комплекс: $X = \bigcup\limits_{n,\alpha} \sigma^n_\alpha$, где σ^n_α — симплексы, причём

(1) • грань любого симплекса $h^n_\alpha : \sigma^n_\alpha \to conv\{e_0, e_1, .., e_n\}$ — тоже симплекс, входящий в X; $(h^k_\beta : \sigma^k_\beta \to conv\{e_0, .., e_k\})$

• пересечение любых $\sigma^n_\alpha \cap \sigma^k_\beta$ есть симплекс, явл-ся их общей гранью;

• всякий симплекс может быть гранью лишь конечного числа симплексов.

(2) $A \subset X$ замкнуто, если $\forall \alpha, n$ $A \cap \sigma^n_\alpha$ замкнуто в σ^n_α.

Cell complex (клеточный) CW-комплекс $X = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} X^k$, где X^0 — дискретно, а пр-во

$X^{k+1} = X^k \cup_{\varphi_k} \Big(\bigsqcup\limits_{\alpha \in A_k} D^{k+1}_\alpha \Big)$, где $\varphi_k : \bigsqcup\limits_{\alpha \in A_k} \underset{\cong S^k_\alpha}{\partial D^{k+1}_\alpha} \to X^k$, причём

(C) всякая замкн. клетка D^k_α пересекает (лишь) конечное число открытых,

(W) $C \subset X$ замкнуто $\Leftrightarrow$ $C \cap D^k_\alpha$ — замкнуто $\forall \alpha, k$.

Опр Многообр-е с краем — топ. многообразие, допускающее окр-ти 2-х видов: $U_\alpha \approx B^n = int(D^n) \approx \mathbb{R}^n$ и $V_\beta \approx H^n_+ = \{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

Край n-мн-я M $= \partial M = \{$прообразы граничных точек карт $V_\beta\}$. — (n-1)-мерное мн-ие без края.

Триангуляция многообразия M = симплициальный комплекс $\approx M$.

$(n=2 \quad M = (V, E, F))$

Эйлерова характеристика

Пусть $X = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \bigsqcup\limits_{\alpha\in A_k} D^k_\alpha$ — клеточный n-комплекс.

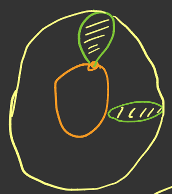
$|A_k|$ — # k-клеток.

Тогда $\chi(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot |A_k|$

Примеры. 1) $S^2 = e^0 \cup e^2$; $\chi(S^2) = 1+1=2$

2) $T^2 = S^1 \times S^1 = (e^0 \sqcup e^1)\times(e^0 \sqcup e^1) = e_0 \cup e^1 \cup e^1 \cup e^2$

$S^1 \vee S^1$



$\approx$ •

$\chi(T^2) = 1-2+1=0.$

3)

$\chi(T^2 \setminus \{pt\}) \overset{?}{=} \chi(T^2) - 1 = -1$

2 Гомотопии, фундам. группы и накрытия

Опр. Отобр. f, g (непр.) $: X \to Y$ гомотопны, если существует непрерывная гомотопия (Обозн. $f \simeq g$.)

$F: X\times[0,1] \to Y$, т.е. $F(x,0) \equiv f(x)$, $F(x,1) \equiv g(x)$.

($F(x,t) = F_t(x)$ — непр. меняется от $f \equiv F_0$ до $g \equiv F_1$)

Св-ва: $f \simeq f$; $(f\simeq g \Rightarrow g \simeq f)$; $f \underset{F_1}{\simeq} g$ и $g \underset{F_2}{\simeq} h \Rightarrow f \simeq h$.

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x,2t) : & t\in[0;\tfrac12] \\ F_2(x,2t-1) : & [\tfrac12, 1] \end{cases}$$

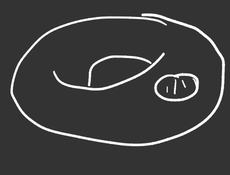
Опр. $X \simeq Y$ гомотопически эквивалентны, если сущ-ют

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

, т.что $f\circ g \simeq Id_Y$ и $g \circ f \simeq Id_X$.

Ясно, что $X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$.

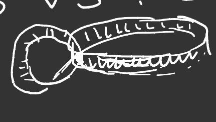
Пример $T^2 \setminus D^2 =$



$T^2 \setminus D^2 \simeq S^1 \vee S^1$, но

$T^2 \setminus D^2 \not\approx S^1 \vee S^1$. Зато

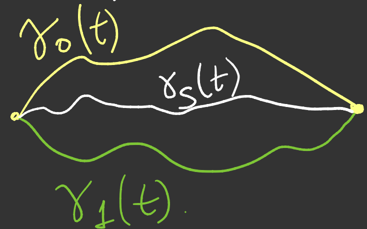
$T^2 \setminus D^2 \approx$



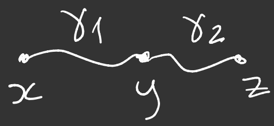
Гомотопии петель и кривых

$\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to M$ — кривые;
петли, если $\gamma_{1,2}(0) = \gamma_{1,2}(1) = p$.

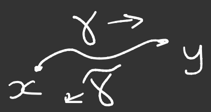
$\gamma_1 \simeq \gamma_2$, если $\exists\, H(t,s)$: $H(t,0) = \gamma_1(t)$, $H(t,1) = \gamma_2(t)$ т.е.



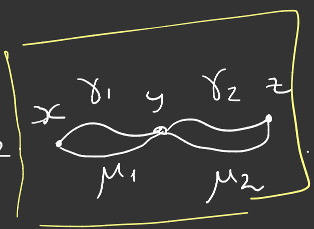
Произведение: $\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & : [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & : \text{при } t \in [1/2, 1] \end{cases}$
$(\gamma_1(1) = y = \gamma_2(0))$



Обратный путь: $\bar\gamma(t) = \gamma(1-t)$



Лемма $\gamma_1 \simeq \mu_1$, $\gamma_2 \simeq \mu_2 \Rightarrow \gamma_1 \cdot \gamma_2 \simeq \mu_1 \cdot \mu_2$
(для петель ассоциативно, в общем сл.-нет)



Теор. Классы гомотопных петель образуют группу $\pi_1(M, p)$.
Если M линейно связно $\pi_1(M) := \pi_1(M,p)$ (не зав. от $p \in M$).
(Фунд. группа)

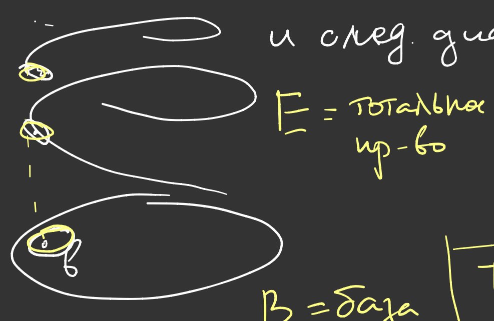
Опр. X стягиваемо, если $\exists$ гомотопия $f: X \to \{pt\}$
$\Downarrow$
X односвязно, если $\pi_1(X) = \{e\}$ (или 0)

Предл. $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
$\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1) = \pi_1(S^1) * \ldots * \pi_1(S^1)$

Пример. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$
$\pi_1(D^n) = 0$.

$\boxed{\text{Накрытия}}$ Локально-трив. расслоение (накрытие) — (E, B, D, p), где D — дискр. = слой
$p: E \to B$ - непр; $\forall b \in B$ $\exists$ окр $U \ni b$: $p^{-1}(U) \approx U \times D$;
и след. диагр. коммут.

$$\begin{tikzcd} U \times D \arrow[r] \arrow[dr, "\text{проек.}"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p"] \\ & U \end{tikzcd}$$



Теор. Любая гомотопия в B (базе) поднимается до гомотопии в тотальном пр-ве E единств. образом.

Теор. Пусть $H < \pi_1(X,p)$ некот. подгр. Тогда $\exists\ \tilde{X}$ и $p: \tilde{X} \to X$, т.ч. $p_* \pi_1(\tilde{X}) = H$.

В частн., $\exists$ универс. накрытие, т.е. $p: \tilde{X} \to X$, где $\tilde{X}$ - односв.

Опр. Мн-е X назыв. асферическим (aspherical), если универс. накр. $\tilde{X}$ стягиваемо.

Теор (Уайтхеда) Конечный CW-комплекс $\iff \pi_k(X) = 0\ \forall k \geq 2$ явл. асферич.

(кажется, дост. только Y)

Теор. Пусть X, Y - асферич. пр-ва. Тогда изоморфизм $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ индуцируется гомот. экв-тью $X \simeq Y$.

Теор Пусть X - асферич. мн-ие. Тогда $\pi_1(X)$ свободна от круч.

Идея: С точностью до накрытия м.сч., что $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(?)

Предл. Пусть $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ - накрытие степени $d = \deg(p) = |D|$ слой

Тогда $\chi(\tilde{X}) = d \cdot \chi(X)$.

3 Задачи

1) $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (т.е. $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$; $\tilde{T}^2 = \mathbb{R}^2$)

2) $T^2 \setminus \{pt\}$. $\chi(T^2 \setminus pt) = -1$; $\pi_1(T^2 \setminus \{pt\}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. ?

На самом деле, $T^2 \setminus \{pt\} = H^2/\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

3) Поверхность S_g, $g \geq 2$. Найти $\chi(S_g)$.
($S_g = H^2/\Gamma$)

Список литературы

1. Э.Б. Винберг. Итоги НТ, том 29, 1988 "Геометрия пр-в пост. крив" "Дискр. гр. движ. пр-в. пос. кр"

2. Ratcliffe "Foundations of Hyperb. Manifolds" 2019, 3 ed.

3. Martelli "Introduction to Geometric Topology"

— — — —

4. Thurston "3-dim geom & topology" (перевод на русс. МЦНМО, 2001.)

5. Apanasov "Conf. geom. of discrete groups and manifolds"